

سوال میان ترم پاییز ۱۴۰۴ و پاسخ آن

(۱) جدول سوال زیر قبلا حل شده است و میانگین 13.7 و واریانس 4.61 میباشد . مجدد حل نکنید

X_i	10	12	13	15	17
f_i	1	2	3	2	2

الف) انحراف معیار را حساب کنید

ب) میانگین با انحراف معیار جمع و تفریق کنید و یکبار دیگر میانگین با دو برابر انحراف معیار جمع و تفریق کنید و برای داده‌های فوق که نرمال است هر دو جواب را کامل توضیح دهید . ج) جدول زیر شباهت زیادی به جدول بالا در همین سوال دارد با استفاده از جواب قسمت بالا ، میانگین و انحراف معیار جدول زیر را بدون حل و بشکل سریع بدست آورید (۳نمره)

Y_i	40	42	43	45	47
f_i	1	2	3	2	2

پاسخ

$$\bar{x} = 13.7 \quad \sigma_x = \sqrt{4.61} = 2.15$$

$$\mu \pm 2\sigma \quad \mu \pm \sigma \quad \text{تحلیل}$$

$$\mu \pm \sigma = 13.7 \pm 2.15 = 11.55 \quad \text{تا} \quad 15.85$$

یعنی بیش از ۶۸٪ داده ها بین 11.55 تا 15.85 میباشند

$$\mu \pm 2\sigma = 13.7 \pm (2 * 2.15) = 13.7 \pm 4.30 = 9.4 \quad \text{تا} \quad 17.99$$

یعنی بیش از ۹۶٪ داده ها بین 9.4 تا 17.99 میباشند

با مشاهده داده های قدیم X ملاحظه میکنیم اگر ۳۰ واحد به آن اضافه کنیم داده جدید y حاصل میشود بنابراین طبق جدول فوق در خصوص y ها میتوان نوشت که

$$y_i = x_i + 30 \rightarrow \bar{y} = \bar{x} + 30 = 13.7 + 30 = 43.7$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \rightarrow \sigma_y = \sigma_x = \sqrt{4.61} = 2.15 \rightarrow \sigma_y = 2.15$$

چون داده های جدید همگی 30 واحد اضافه شده اند پس میانگین داده های جدید 30 واحد بیشتر از میانگین داده های قبلی میشود و انحراف معیار داده های جدید با انحراف معیار داده های قدیم هیچ فرقی نمیکند

نکات اضافی

ضریب تغییرات

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2.15}{43.7} = 0.049 = 4.9\%$$

الان $\rho = 0.049$ عدد کوچک است یعنی پراکندگی داده ها کم است

در محاسبه کسر واریانس اگر توان دوم فراموش کنیم جواب صفر میشود و به این محاسبه واریانس نمیگویند

۲) -نمرات دانشجویان با داده‌هایی زیر را اعلام شده است. الف) میانه داده‌ها چه مقدار است؟ ب- مد(نما) داده‌ها چه مقدار است. چرا-ج- صدك 23 داده‌ها را معلوم کنید-د- میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید(عنصره)

نمره = x	8-10	10-12	12-14	14-16
تعداد = f	1	4	3	2

*** حل : ابتدا جدول را مرتب نموده و فراوانی تجمعی را بدست می‌آوریم و داده قدیم X_m نام می‌گذاریم و داده جدید X را که میانگین کران بالا و پایین هر طبقه است بدست می‌آوریم

نمره = X_m	8-10	10-12	12-14	14-16
تعداد = f	1	4	3	2
F	1	5	8	10
نمره = x	9	11	13	15

*** مد یا نما : همان داده‌ای است که بیشترین فراوانی (تعداد) را دارد که میشود 12-14 که بایستی دقیقاً مشخص کنیم چه عددی بین 10-12 میباشد

$$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) * C = L_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right) * C = 10 + \frac{4 - 1}{(4 - 1) + (4 - 3)} * 2 = 11.5$$

*** میانه : میانه = وسط صف منظم داده که $Q=1/2$

$$Q * \sum f_i = \frac{1}{2} * (1 + 4 + 3 + 2) = 5$$

$$\rightarrow 5 \rightarrow \frac{F}{F} \rightarrow F = 8 \rightarrow \frac{X}{X} \rightarrow x = 12 - 14$$

میانه عددی بین 12-14 است که برای تعیین دقیق آن

$$m = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 12 + \frac{\frac{1}{2} * (1 + 4 + 3 + 2) - 5}{3} * 2 =$$

$$m = 12 + \left(\frac{5-5}{2} \right) * 2 = 12$$

یعنی نصف یا ۵۰ درصد داده‌ها ۱۲ یا کمتر از ۱۲ هستند

*** صدك ۲۳

$$Q * (\sum f_i) = \frac{23}{100} * (1 + 4 + 3 + 2) = 2.3$$

$$\rightarrow 2.3 \rightarrow \frac{F}{F} \rightarrow F = 5 \rightarrow \frac{X}{X} \rightarrow x = 10 - 12$$

برای محاسبه دقیق صدك ۲۳

$$Q = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 10 + \frac{\frac{23}{100} * (1 + 4 + 3 + 2) - 1}{4} * 2 =$$

$$Q = 10 + \frac{2.3-1}{4} * 2 = 10.65$$

یعنی ۲۳ درصد داده‌ها ۱۰.۶۵ یا کمتر از ۱۰.۶۵ هستند

$$\bar{x} = \frac{\sum (x_i * f_i)}{\sum f_i} = \frac{(9 * 1) + (11 * 4) + (13 * 3) + (15 * 2)}{1 + 4 + 3 + 2} = \frac{122}{10} = 12.2$$

میانگین

*** واریانس

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i} = \frac{(9 - 12.2)^2 * 1 + (11 - 12.2)^2 * 4 + (13 - 12.2)^2 * 3 + (15 - 12.2)^2 * 2}{1 + 4 + 3 + 2}$$

$$\sigma^2 = 3.36$$

واریانس

$$\sigma = \sqrt{3.36} = 1.83$$

انحراف معیار

۳) مصرف یک دارو در سه سال گذشته مقادیر زیر بوده در سال بعد به روش رگرسیون خطی پیش بینی نمایید (۳نمره)

سال = x	1401	1402	1403	1405
مصرف = y	2	3	3	?

حل:

سال مبنا را سال 1402 در نظر میگیریم و همه X ها را از 1402 کم میکنیم

X=سال	-1	0	+1		+3
y=مصرف	2	3	3		

میتوان پیش بینی کرد که عدد مصرف روند صعودی دارد پس باید بیشتر از ۳ شود

$$y = a + bx, \quad b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}, \quad \bar{y} = a + b\bar{x} \rightarrow a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1 * 2) + (0 * 3) + (1 * 3) - \frac{(-1 + 0 + 1) * (2 + 3 + 3)}{3}}{(-1)^2 + 0^2 + (1)^2 - \frac{(-1 + 0 + 1)^2}{3}}$$

$$b = \frac{-4 + 0 + 3 - \frac{0 * 10}{3}}{1 + 0 + 1 - \frac{0}{3}} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1 + 0 + 1}{3} = 0, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{2 + 3 + 3}{3} = \frac{8}{3} = 2.66$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \rightarrow a = \bar{y} - b\bar{x} \rightarrow a = 2.66 - 0.5 * 0 \rightarrow a = 2.66 \rightarrow y = a + bx \rightarrow$$

$$y = 2.66 + 0.5x$$

$$1405 - 1402 = 3 \rightarrow y = 2.66 + 0.5x \rightarrow y = 2.66 + (0.5 * 3) = 2.66 + 1.5 = 4.16$$

پس برای سال 1405 پیش بینی به مقدار 4.16 میشود

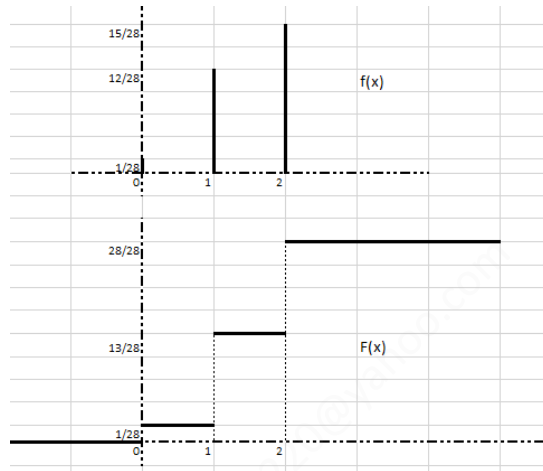
۴) فروشگاه ۸ کامپیوتر دارد که شش کامپیوتر سالم و دو کامپیوتر معیوب است از این فروشگاه به تصادف ۲ کامپیوتر میخریم (الف) همه حالات و احتمالات سالم بودن را بدست آورید (ب) و سپس در یک جدول بنویسید این جدول شامل تعداد سالم ها و تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع احتمال انباشته $F(x)$ و نمودار هر دو تابع رسم کنید دو شرط تابع چگالی احتمال را صحت سنجی کنید (۳ نمره)

$$p = \frac{\binom{6}{0} \binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{1 * 1}{28} = \frac{1}{28}$$

$$p = \frac{\binom{6}{1} \binom{2}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{12}{28} = \frac{12}{28}$$

$$p = \frac{\binom{6}{2} \binom{2}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28} = \frac{15}{28}$$

x	0	1	2	
f(x)	$\frac{1}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\sum f(x) = 1$ ok $0 \leq f(x) \leq 1$ ok
F(x)	$\frac{1}{28}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{28}{28} = 1$	



۵) دانشگاه زند کل کامپیوترهای مورد نیازش را از دو شرکت ۸۰٪ از شرکت A و بقیه از شرکت B تامین میکند - از قبل میدانیم در شرکت A به میزان ۱٪ کامپیوترهایش معیوب - در شرکت B به میزان ۲٪ کامپیوترهایش میباشد. یک کامپیوتر از انبار دانشگاه برمیداریم. (الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ (ب) احتمال اینکه سالم باشد؟

(ج) اگر این کامپیوتر معیوب باشد احتمال اینکه از شرکت B باشد چقدر است (۳ نمره)

	در صد تامین نیاز	در صد معیوب
A	80%	1%
B	100%-80%=20%	2%

M = معیوب

$$p(M) = p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B)$$

$$p(M) = \left(\frac{80}{100} * \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{20}{100} * \frac{2}{100} \right) = \frac{120}{10000} = 0.012$$

$$1 - p(M) = 1 - 0.012 = 0.988$$

$$p(B|M) = \frac{p(B) * p(M|B)}{p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B)}$$

$$p(B|M) = \frac{\frac{20}{100} * \frac{2}{100}}{\left(\frac{80}{100} * \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{20}{100} * \frac{2}{100} \right)} = \frac{\frac{40}{10000}}{\frac{120}{10000}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} = 0.33$$

از دو سوال ۶ و ۷ در زیر یکی را حل کنید

(۶ الف) در این تابع زیر مقدار K را طوری بدست آورید که تابع چگالی احتمال گردد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2k} & x = 0, 1, 4 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{cases}$$

بجای k عدد بدست آمده را بگذارید (ب) جدول تابع چگالی با این مقدار K بنویسید (ج) صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید (د) در همین جدول تابع $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ و $E(x)$ را بنویسید با توجه باینکه $p = f(x)$ است (ه - مقدار $p = f(x \leq 2)$ بدست آورید (ز) امید ریاضی $E(x)$ را محاسبه کنید. (ح) امید ریاضی $E(x \leq 2)$ بدست آورید (۴ نمره) حل :

اگر در یک تابع دو قانون برقرار باشد به آن تابع، تابع چگالی احتمال میگوییم

$$\sum f(x) = 1 \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

حال شرط مجموع را بررسی میکنیم

$$\sum \frac{x+1}{2k} = 1$$

$$\frac{0+1}{2k} + \frac{1+1}{2k} + \frac{4+1}{2k} = 1 \quad \frac{8}{2k} = 1 \quad 2k = 8 \quad k = 4$$

بنابراین در تابع $f(x) = \frac{x+1}{2k}$ مقدار $k=4$ میگذاریم

$$f(x) = \frac{x+1}{8}$$

حال جدول را مینویسیم

X	0	1	4	
P=f(X)	1/8	2/8	5/8	
F(X)	1/8	3/8	8/8	
E(x)=Σ x(f(x))	0*1/8=0	1*2/8=2/8	4*5/8=20/8	=0+2/8+20/8=22/8

چون در سطر $f(x)$ همه اعداد بین صفر و یک هستند

$$0 \leq \frac{1}{8} \leq 1 \quad 0 \leq \frac{2}{8} \leq 1 \quad 0 \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

و چون در سطر $f(x)$ جمع همه اعداد یک میشود

$$\sum \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

پس صحت دو شرط برقرار است بنابراین تابع $f(x) = \frac{x+1}{8}$ تابع چگالی احتمال است

(ه) $p = f(x \leq 2)$ طبق جدول

$$p = f(x \leq 2) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

(ز) امید ریاضی $E(x)$

$$E(x) = \sum x * f(x) = (0) * \frac{1}{8} + \left(1 * \frac{2}{8}\right) + \left(4 * \frac{5}{8}\right) = \frac{22}{8}$$

(ح) امید ریاضی $E(x \leq 2)$ بدست آورید

$$E(x \leq 2) = \sum x * f(x) = (0) * \frac{1}{8} + \left(1 * \frac{2}{8}\right) = \frac{2}{8}$$

(۷) در این تابع زیر مقدار K را طوری بدست آورید که تابع چگالی احتمال گردد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+k}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{cases}$$

بجای k عدد بدست آمده را بگذارید ب) جدول تابع چگالی با این مقدار K بنویسید ج) صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید د) در همین جدول تابع f(x) و تابع توزیع F(x) را بنویسید (۴ نمره)

$$\int_0^1 \frac{x+k}{2} dx = 1 \quad \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x dx + k \int_0^1 dx \right) = 1 \quad \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + kx \Big|_0^1 \right) = 1 \quad \frac{1}{2} + k = 2 \quad k = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+\frac{3}{2}}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{cases}$$

برای صحت شرط در این تابع

اگر انتگرال این تابع بین صفر و یک حساب کنیم ، مقدارش یک میشود پس شرط اول برقرار است
و اگر x=0 بگذاریم مقدار f(x)=3/4 میشود که بین صفر و یک میشود ولی اگر x=1 بگذاریم مقدار f(x)=5/2 میشود که از یک بزرگتر است پس شرط دوم برقرار نیست و این تابع ، تابع چگالی احتمال نمیشود
و پاسخ به دیگر سوالات هیچ معنی ندارد ، چون این تابع ، تابع احتمال نیست