

1) جدول سوال زیر قبلا حل شده است و میانگین 14.1 و واریانس 3.98 میباشد. مجدد حل نکنید

X_i	10	13	14	15	17
f_i	1	3	2	2	2

الف) انحراف معیار را حساب کنید

ج) میانگین با انحراف معیار جمع و تفریق کنید و یکبار دیگر میانگین با دو برابر انحراف معیار جمع و تفریق کنید و برای داده فوق که نرمال است هر دو جواب را کامل توضیح دهید. د) جدول زیر شباهت زیادی به جدول بالا در همین سوال دارد با استفاده از جواب قسمت بالا میانگین و انحراف معیار جدول زیر را بدون حل و بشکل سریع بدست آورید و ضریب تغییرات این داده جدید را بدست آورید (10)

X_i	110	113	114	115	117
f_i	1	3	2	2	2

حل

$$\bar{x} = 14.1 \quad \sigma_x = \sqrt{3.98} = 1.995$$

$$\mu \pm 2\sigma \quad \mu \pm \sigma \text{ تحلیل}$$

$$\mu \pm \sigma = 14.1 \pm 1.995 = 12.105 \quad \text{تا} \quad 16.095$$

یعنی بیش از 68% داده ها بین 12.105 تا 16.095 میباشند

$$\mu \pm 2\sigma = 14.1 \pm (2 * 1.995) = 14.1 \pm 3.99 = 10.11 \quad \text{تا} \quad 18.09$$

یعنی بیش از 96% داده ها بین 10.11 تا 18.09 میباشند

طبق جدول فوق در خصوص y ها میتوان نوشت که

$$y_i = x_i + 100$$

و طبق قانون میتوان نوشت

$$\bar{y} = \bar{x} + 100 = 14.1 + 100 \rightarrow \bar{y} = 114.1$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \rightarrow$$

$$\sigma_y = \sigma_x = \sqrt{3.98} = 1.995 \rightarrow \sigma_y = 1.995$$

چون داده های جدید همگی 100 واحد اضافه شده اند پس میانگین داده های جدید 100 واحد بیشتر از میانگین داده های

قبلی میشود و انحراف معیار داده های جدید با انحراف معیار داده های قدیم هیچ فرقی نمیکند

ضریب تغییرات

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1.995}{114.1} = 0.0175 = 1.7\%$$

الان $\rho = 0.0175$ عدد خیلی کوچکی است یعنی پراکندگی داده ها کم است

همیشه $0 \leq \rho \leq 1$ است. اگر ρ صفر شود یعنی داده ها اصلا پراکنده نیستند دادها بسیار بهم نزدیک هستند

اگر ρ یک شود یعنی داده ها خیلی پراکنده هستند

2) در ظرفی 6 توپ داریم (1 توپ سفید 2 توپ سیاه 3 توپ قرمز). الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال

اینکه یک توپ قرمز و دو توپ سیاه باشد چقدر است. ب) سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی

قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. ج) سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم

احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. (10 نمره)

حل

الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ تا سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{2}{2} \binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1 * \frac{2!}{2!(2-2)!} * 3}{\frac{6!}{3!(6-3)!}} = \frac{1 * 1 * 3}{20} = \frac{3}{20}$$

ب) سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{2}{0} \binom{3}{1}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{1}{1} \binom{2}{0}}{\binom{4}{1}} = \frac{3}{6} * \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

ج) سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{2}{0} \binom{3}{1}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{3}{0}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{3}{0}}{\binom{6}{1}} = \frac{3}{6} * \frac{2}{6} * \frac{2}{6} = \frac{12}{216} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

3) شرکتی ده (10) کامپیوتر دارد 7 کامپیوتر معیوب است و بقیه سالم است 2 کامپیوتر میخریم محاسبه کنید موارد ذیل را
الف) کلیه حالات و احتمال سلامت این 2 کامپیوتر بنویسید. جدول $f(x)$ و $F(x)$ و صحت دو شرط $f(x)$ را چک نمایید و نمودار هر دو تابع رسم کنید (20 نمره)
احتمال هر دو خراب

$$p_{0s-2k} = \frac{\binom{3}{0} \binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 * \frac{7!}{2!(7-2)!}}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} = \frac{1 * \frac{5! * 6 * 7}{2! * 5!}}{\frac{8! * 9 * 10}{2! * 8!}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

احتمال یکی خراب یکی سالم

$$p_{1s-1k} = \frac{\binom{3}{1} \binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 * 7}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

احتمال هر دو سالم

$$p_{2s-0k} = \frac{\binom{3}{2} \binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!(3-2)!} * 1}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} = \frac{3}{45}$$

$x =$ کامپیوتر سالم

$R(x) = \{0, 1, 2\}$

$f(x) =$ تابع چگالی احتمال

$f(0) = 21/45$

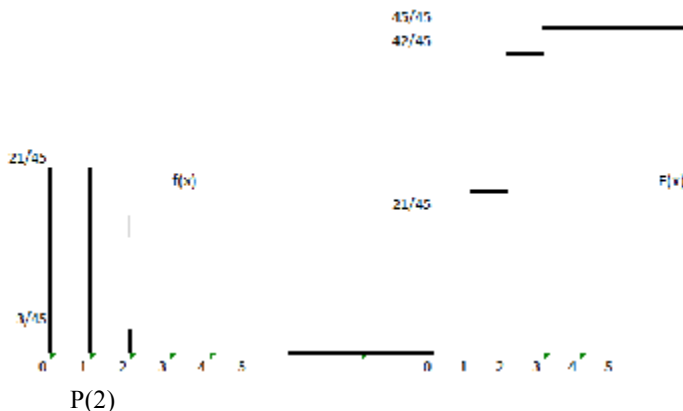
$f(1) = 21/45$

$f(2) = 3/45$

$X =$ سالم	0	1	2
$f(x)$	21/45	21/45	3/45
$F(x)$	0	21/45	42/45

ملاحظه میشود که هر $f(x)$ بین صفر و یک و جمع $f(x)$ برابر یک میشود

میشود نمودار $f(x)$ و $F(x)$ را رسم نمود



4) دانشگاه زند کل کامپیوترهای مورد نیازش را از سه شرکت A و B و C تامین میکند - میزان کامپیوترهای معیوب در سه شرکت - 2٪ شرکت A - 1٪ شرکت B - 3٪ شرکت C معیوب میباشد. یک کامپیوتر از انبار دانشگاه بر میداریم. الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟ ج) اگر این کامپیوتر خراب باشد احتمال اینکه از شرکت B باشد چقدر است؟ (20 نمره)

	در صد تامین نیاز	در صد معیوب
A	50%	2%
B	20%	1%
C	100%-(50%+20%)=30%	3%

M = معیوب

$$p(M) = p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) + p(C) * p(M|C)$$

$$p(M) = \left(\frac{50}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{20}{100} * \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} * \frac{3}{100}\right) = \frac{210}{10000} = 0.021$$

$$1 - p(M) = 1 - 0.021 = 0.979$$

$$p(B|M) = \frac{p(B) * p(M|B)}{p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) + p(C) * p(M|C)}$$

$$p(B|M) = \frac{\frac{20}{100} * \frac{1}{100}}{\left(\frac{50}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{20}{100} * \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} * \frac{3}{100}\right)} = \frac{\frac{20}{10000}}{\frac{210}{10000}} = \frac{20}{210} = \frac{2}{21}$$

5) در یک منطقه میزان مبتلایان به ازدیاد قندخون در چند سال گذشته بشرح ذیل میباشد معادله خط رگرسیون را نوشته پیش بینی سال 1401 را محاسبه کنید (20نمره)

سال=x	1395	1396	1397	1398	1399	1401
میزان قند	2	3	4	4	5	??

حل

سال=x	1395	1396	1397	1398	1399	1401
میزان قند	2	3	4	4	5	??
Xn	-2	-1	0	1	2	4

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i * \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

$$= \frac{(-2 * 2) + (-1 * 3) + (0 * 4) + (1 * 4) + (2 * 5) - \frac{(-2 - 1 + 0 + 1 + 2)(2 + 3 + 4 + 4 + 5)}{5}}{((-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2) - \frac{(-2 - 1 + 0 + 1 + 2)^2}{5}}$$

$$= \frac{7}{10} = 0.7$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-2 - 1 + 0 + 1 + 2}{5} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{2 + 3 + 4 + 4 + 5}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad 3.6 = a + (0.7 * 0) \quad a = 3.6$$

P(3)

$$y = 3.6 + 0.7x$$

$$Xm = 1400 \rightarrow x = 1401 - 1397 = 4 \rightarrow y = 3.6 + (0.7 * 4) = 6.4$$

6) نمرات دانشجویان بشرح زیر است داده‌ها را در جدول زیر مرتب کنید. الف) مد(نما) داده‌ها چه مقدار است (چرا) ب). میانه داده‌ها چه مقدار است؟ - ج) صدک بیستم داده‌های را معلوم کنید - د) میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید. (20نمره)

نمره = x	17-20	11-14	14-17	8-11	5-8
تعداد = f	2	2	3	2	1

حل

نمره = x	5-8	8-11	11-14	14-17	17-20
تعداد = f	1	2	2	3	2
F	1	3	5	8	10
Xn	6.5	9.5	12.5	15.5	18.5

مد یا نما: همان داده‌ای است که بیشترین فراوانی (تعداد) را دارد که میشود 14-17 که بایستی دقیقاً مشخص کنیم چه عددی بین 14-17 میباشد

$$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) * C = L_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right) * C = 14 + \frac{3 - 2}{(3 - 2) + (3 - 2)} * 3$$

میانه: میانه = وسط صف منظم داده که $Q=1/2$

$$Q * \sum f_i = \frac{1}{2} \sum f_i = \frac{1}{2} * (1 + 2 + 2 + 3 + 2) = 5$$

$$\rightarrow 5 + \rightarrow \overset{در}{F} \rightarrow F = 8 \rightarrow \overset{در}{X} \rightarrow x = 14 - 17$$

میانه عددی بین 14-17 است که برای تعیین دقیق آن

$$Q_{\frac{1}{2}} = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 14 + \frac{\frac{1}{2} * (1 + 2 + 2 + 3 + 2) - 5}{3} * 3 = 14$$

صدک 20

$$Q * \sum f_i = \frac{20}{100} \sum f_i = \frac{20}{100} * (1 + 2 + 2 + 3 + 2) = 2$$

$$\rightarrow 2 + \rightarrow \overset{در}{F} \rightarrow F = 3 \rightarrow \overset{در}{X} \rightarrow x = 8 - 11$$

صدک بیستم عددی بین 8-11 است که برای تعیین دقیق آن

$$Q_{\frac{20}{100}} = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 8 + \frac{\frac{20}{100} * (1 + 2 + 2 + 3 + 2) - 1}{2} * 3 = 9.5$$

میانگین با Xn

نمره = x	6.5	9.5	12.5	15.5	18.5
تعداد = f	1	2	2	3	2

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(6.5 * 1) + (9.5 * 2) + (12.5 * 2) + (15.5 * 3) + (18.5 * 2)}{1 + 2 + 2 + 3 + 2} = \frac{134}{10} = 13.4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{(6.5 - 13.4)^2 * 1 + (9.5 - 13.4)^2 * 2 + (12.5 - 13.4)^2 * 2 + (15.5 - 13.4)^2 * 3 + (18.5 - 13.4)^2 * 2}{1 + 2 + 2 + 3 + 2} = \frac{144.9}{10} = 14.49$$

واریانس

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{14.49} = 3.81 \text{ انحراف معیار}$$

P(4)