

سوالات و پاسخ امتحان پایانترم آمار و احتمالات 5 سوال (ارزش امتحان پایانترم 13 نمره از 20 نمره میباشد) - حتما در یک محل خالی در وسط هر برگ پاسخ نام و فامیل نوشته و همه پاسخها در یک فایل پی دی اف ارسال کنید - استفاده از جزوه ممنوع مشورت با دیگران ممنوع - فقط ماشین حساب آزاد - مدت 90 دقیقه که بعد از 75 دقیقه شروع به بارگذاری کنید تا با مشکل اینترنت و اتمام وقت مواجه نشوید

1) در یک منطقه میزان مبتلایان به ازدیاد کرونا در چند هفته گذشته بشرح ذیل میباشد معادله خط رگرسیون را نوشته پیش بینی هفته بعدی چقدر میباشد (20نمره)

x=هفته	23	24	25	26
میزان بیماری	3	4	6	؟

x=هفته	23	24	25	26
میزان بیماری	3	4	6	؟
	-1	0	1	2

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i * \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1 * 3) + (0 * 4) + (1 * 6) - \frac{(-1 + 0 + 1)(3 + 4 + 6)}{3}}{((-1)^2 + (0)^2 + (1)^2) - \frac{(-1 + 0 + 1)^2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1 + 0 + 1}{3} = 0 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{3 + 4 + 6}{3} = \frac{13}{3} = 4.33$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad 4.33 = a + (1.5 * 0) \quad a = 4.33$$

$$y = 4.33 + 1.5 * x$$

$$x_m = 26 \rightarrow x = 26 - 24 = 2 \rightarrow y = 4.33 + (1.5 * 2) = 7.33$$

روند بیماری صعودی است

2) نمرات دانشجویان بشرح زیر است. الف) مد(نما) داده ها چه مقدار است (چرا) ب). میانه داده ها چه مقدار است؟ ج) صدک 25 را محاسبه کنید. د) میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید (20نمره)

x = نمره	10	13	14	15	16
f = تعداد	1	2	3	2	2

x = نمره	10	13	14	15	16
f = تعداد	1	2	3	2	2
F	1	3	6	8	10

مد داده ای بمقدار 14 میباشد زیرا بیشترین تعداد را دارد

$$M=14$$

=====

میانه داده ها

$$Q \sum f_i = \frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + 2 + 2) = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow \text{در سطر } Fi \rightarrow 5+ \rightarrow Fi=6 \rightarrow m=14$$

یعنی نصف داده ها 14 یا کمتر از 14 هستند

=====

صدک 25 داده ها

$$Q \sum f_i = \frac{25}{100}(1 + 2 + 3 + 2 + 2) = \frac{250}{100} = 2.5 \rightarrow \text{در سطر } Fi \rightarrow 2.5+ \rightarrow Fi=3 \rightarrow m=13$$

یعنی 25% داده ها 13 یا کمتر از 31 هستند

=====

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(10 * 1) + (13 * 2) + (14 * 3) + (15 * 2) + (16 * 2)}{1 + 2 + 3 + 2 + 2} = \frac{140}{10} = 14$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{(10 - 14)^2 * 1 + (13 - 14)^2 * 2 + (14 - 14)^2 * 3 + (15 - 14)^2 * 2 + (16 - 14)^2 * 2}{1 + 2 + 3 + 2 + 2} = 2.8 \text{ واریانس}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.8} = 1.67 \text{ انحراف معیار}$$

3) یک واحد دانشگاه زند کل کامپیوترهای مورد نیازش را از دو شرکت A و B تهیه میکند، در این دو شرکت وضعیت کامپیوترهای معیوب - 2% شرکت A - 3% شرکت B معیوب هستند. یک کامپیوتر از انبار دانشگاه برمیداریم. الف) احتمال اینکه این کامپیوتر معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟ ج) اگر این کامپیوتر خراب باشد احتمال اینکه از شرکت B باشد چقدر است؟ (20 نمره)

حل:

	در صد معیوب	در صد تامین نیاز
A	2%	60%
B	3%	40%

M = معیوب

$$p(M) = p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) = \left(\frac{60}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{40}{100} * \frac{3}{100}\right) = 0.0240 = 0.024$$

$$1 - p(M) = 1 - 0.024 = 0.976$$

$$p(B|M) = \frac{p(B) * p(M|B)}{p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B)}$$

$$p(B|M) = \frac{\frac{40}{100} * \frac{3}{100}}{\left(\frac{60}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{40}{100} * \frac{3}{100}\right)} = \frac{\frac{120}{10000}}{\frac{240}{10000}} = \frac{120}{240} = \frac{1}{2}$$

50% احتمال دارد از شرکت B باشد

- 4) از سوابق یک تیرانداز مشخص میشود که 80% تیرهایش به هدف اصابت میکند - این تیر انداز فردا میخواهد 100 تیر شلیک کند الف) نوع تابع توزیع احتمال را نام ببرید ب) با این اعداد فرمول تابع توزیع را برای این 100 پرتاب بنویسید. ملاحظه میشود جدول برای $n > 20$ جوابی ندارد حال اگر مطمئن باشیم پرتاب ها نرمال است (مقادیر نرمال استاندارد با شرح زیر)
- ج) احتمال اینکه حداکثر 76 پرتابش به هدف اصابت کند چقدر است؟
- د) احتمال اینکه بیش از 86 بار تیرهایش به هدف اصابت کند چقدر است؟
- ه) احتمال اینکه دقیقاً 80 بار تیرهایش به هدف بخورد چقدر است
- $p(z \leq 2) = 0.98$, $p(z \leq 1.5) = 0.93$, $p(z \leq 1) = 0.85$, $p(z \leq 0.5) = 0.7$, $p(z \leq 0) = 0.5$
 $p(z \leq -2) = 0.02$, $p(z \leq -1.5) = 0.07$, $p(z \leq -1) = 0.15$, $p(z \leq -0.5) = 0.3$
- حل: پرتاب تیر تابع توزیع احتمال دوجمله ای است

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \leq 0, 1, 2, \dots, n, \quad \mu = np, \quad \sigma = \sqrt{npq} \\ 0 & \text{سایرین } x \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \binom{100}{x} 0.8^x * 0.2^{100-x} & x \leq 0, 1, 2, \dots, 100, \quad \mu = 80, \quad \sigma = \sqrt{16} = 4 \\ 0 & \text{سایرین } x \end{cases}$$

برای توزیع نرمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & -\infty \leq x \leq \infty \quad \mu = \text{میانگین} \quad \sigma = \text{انحراف معیار} \\ 0 & \text{سایرین } x \end{cases}$$

$$p = 0.8 \quad q = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$$

در تابع توزیع دو جمله ای میانگین برابر است با

$$\mu = np = 100 * 0.8 = 80$$

در تابع توزیع دو جمله ای انحراف معیار برابر است با

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0.8(0.2)} = \sqrt{16} = 4$$

چون در صورت سوال مطرح شده که پرتاب ها نرمال می باشد پس میتوان گفت که میتوان این توزیع دو جمله ای را از طریق جدول توزیع نرمال حل نمود

$$p(x \leq 76) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{76-80}{4}\right) = P(z \leq -1) = 0.15$$

$$p(x > 86) = 1 - P(x \leq 86) = 1 - P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{86-80}{4}\right) = 1 - P(z \leq 1.5) = 1 - 0.93 = 0.07$$

$$p(x = 80) = p(x \leq 80) - p(x \leq 79) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{80-80}{4}\right) - P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{79-80}{4}\right) = p(z \leq 0) - p(z \leq -0.25) \\ = 0.5 - 0.4013 = 0.0987 \approx 0.1$$

(5) - در تابع زیر مقدار عدد K را طوری بدست آورید که این تابع چگالی احتمال بشود

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k+1} & x = 1, 2, 4 \\ 0 & \text{دیگر } x \end{cases}$$

سیس جدول تابع چگالی با این مقدار k بنویسید و صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید و در این جدول مقادیر تابع چگالی و

توزیع را بنویسید و امید ریاضی $E(x)$ بدست آورید احتمال $p(2 \leq x \leq 4)$ و همچنین امید $E(2 \leq x \leq 4)$ را

محاسبه کنید (20نمره)

حل :

$$\sum_1 f(x) = 1 \rightarrow \sum \frac{x}{k+1} = 1$$

$$\frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+1} + \frac{4}{k+1} = 1 \rightarrow \frac{7}{k+1} = 1 \rightarrow k+1 = 7 \rightarrow k = 6$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k+1} & x = 1, 2, 4 \\ 0 & \text{دیگر } x \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{7} & x = 1, 2, 4 \\ 0 & \text{دیگر } x \end{cases}$$

X	1	2	4
f(x)	1/7	2/7	4/7
F(x)	0	1/7	3/7
			7/7

$$E(x) = \sum x * f(x) = (1 * 1/7) + (2 * \frac{2}{7}) + (4 * \frac{4}{7}) = 21/7 = 3$$

$$p((2 \leq x \leq 4)) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 6/7$$

$$E(2 \leq x \leq 4) = \sum x * f(x) = (2 * \frac{2}{7}) + (4 * \frac{4}{7}) = 20/7 = 2.8$$