

سوالات و پاسخ - امتحان میانترم آمار و احتمالات - اردیبهشت 1400

1) جدول سوال زیر قبلا حل شده است و میانگین 14.3 و واریانس 4.76 میباشد. مجدد حل نکنید

X_i	10	12	14	15	17
f_i	1	3	2	2	2

الف) انحراف معیار را حساب کنید

ج) میانگین با انحراف معیار جمع و تفریق کنید و یکبار دیگر میانگین با دو برابر انحراف معیار جمع و تفریق کنید و برای داده فوق که نرمال است هر دو جواب را کامل توضیح دهید. (د) جدول زیر شباهت زیادی به جدول بالا در همین سوال دارد با استفاده از جواب قسمت بالا میانگین و انحراف معیار جدول زیر را بدون حل و بشکل سریع بدست آورید (10نمره)

X_i	20	22	24	25	27
f_i	1	3	2	2	2

حل :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.76} = 2.18 \quad \text{انحراف معیار}$$

$$\mu \pm \sigma \quad \mu \pm 2\sigma$$

$$\mu \pm \sigma = 14.3 \pm 2.18 = 12.12 \quad \text{تا} \quad 16.48$$

یعنی بیش از 68٪ داده ها بین 12.12 تا 16.48 میباشند

$$\mu \pm 2\sigma = 14.3 \pm (2 * 2.18) = 14.3 \pm 4.36 = 9.94 \quad \text{تا} \quad 18.66$$

یعنی بیش از 96٪ داده ها بین 9.94 تا 18.66 میباشند

برای جدول جدید که 10 تا نسبت به قبلی اضافه شده - میانگین 10 تا اضافه شده و واریانس و انحراف معیار تغییر نمیکند

$$\bar{x} = 14.3 + 10 = 24.3$$

$$\sigma = 2.18$$

.....

2) در ظرفی 6 توپ داریم (1 توپ سفید 3 توپ سیاه 2 توپ قرمز). الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ سیاه باشد چقدر است. ب) سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. ج) سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. (10 نمره)

الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ تا سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{3}{2} \binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1 * \frac{3!}{2!(3-2)!} * 2}{6!} = \frac{1 * 3 * 2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

ب) سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{3}{0} \binom{2}{1}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{3}{1} \binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{1}{0}}{\binom{4}{1}} = \frac{2}{6} * \frac{3}{5} * \frac{2}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

ج) سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{3}{0} \binom{2}{1}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{3}{1} \binom{2}{0}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{3}{1} \binom{2}{0}}{\binom{6}{1}} = \frac{2}{6} * \frac{3}{6} * \frac{3}{6} = \frac{18}{216} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3) آزمایشگاهی 6 روز هفته فعال است. تعداد آزمایشهای انجام شده در هر روز یکسان است. احتمال خطا در آزمایش سرطان در روزهای مختلف هفته: شنبه 2٪، یکشنبه 2٪، دوشنبه 1٪، سه شنبه 1٪، چهارشنبه 3٪، پنجشنبه 5٪ است. نتیجه آزمایشگاه برای تشخیص سرطان برای شخصی خطا داشت. احتمال اینکه رور پنجشنبه آزمایش انجام شده باشد چقدر است. (10 نمره)

و حل:

خطا = W ضما احتمال وقوع هر روز هفته مثلا احتمال پنجشنبه یک روز از کل شش روز میباشد

شنبه D0	یکشنبه D1	دوشنبه D2	سه شنبه D3	چهارشنبه D4	پنجشنبه D5
2%	2%	1%	1%	3%	5%

$$P(d5|w) = \frac{p(d5) * p(w|d5)}{\sum p(di) * p(w|di)}$$

$$= \frac{p(d5) * p(w|d5)}{[p(d0) * p(w|d0)] + [p(d1) * p(w|d1)] + [p(d2) * p(w|d2)] + [p(d3) * p(w|d3)] + [p(d4) * p(w|d4)] + p(d5) * p(w|d5)}$$

$$p(d5|w) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{5}{100}\right)}{\left[\left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{2}{100}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{2}{100}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{1}{100}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{1}{100}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{3}{100}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{5}{100}\right)\right]} = \frac{5}{14}$$

4) یک واحد دانشگاه علمی کاربردی کل کامپیوترهای مورد نیازش را از سه شرکت 20٪ از شرکت A و 30٪ از شرکت B و بقیه از شرکت C تامین میکند - میزان کامپیوترهای معیوب در سه شرکت - 3٪ شرکت A - 1٪ شرکت B - 2٪ شرکت C معیوب میباشد. یک کامپیوتر از انبار دانشگاه بر میداریم. الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟ ج) اگر این کامپیوتر خراب باشد احتمال اینکه از شرکت B باشد چقدر است؟ (20 نمره)

حل:

	در صد تامین نیاز	در صد معیوب
A	20%	3%
B	30%	1%
C	50%	2%

M = معیوب

$$p(M) = p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) + p(C) * p(M|C)$$

$$p(M) = \left(\frac{20}{100} * \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} * \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{50}{100} * \frac{2}{100}\right) = 0.0190 = 0.019$$

$$1 - p(M) = 1 - 0.019 = 0.981$$

$$p(C|M) = \frac{p(C) * p(M|C)}{p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) + p(C) * p(M|C)}$$

$$p(C|M) = \frac{\frac{50}{100} * \frac{2}{100}}{\left(\frac{20}{100} * \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} * \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{50}{100} * \frac{2}{100}\right)} = \frac{\frac{1000}{10000}}{\frac{190}{10000}} = \frac{10}{19} = \frac{3}{19}$$

5) در یک منطقه میزان مبتلایان به ازدیاد قندخون در چند سال گذشته بشرح ذیل میباشد معادله خط رگرسیون را نوشته پیش بینی سال 1400 چقدر میباشد (20نمره)

سال=x	1395	1396	1397	1398	1399	1400
میزان قند	2	3	3	4	5	??
x_n	-2	-1	0	1	2	3

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i * \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

$$= \frac{(-2 * 2) + (-1 * 3) + (0 * 3) + (1 * 4) + (2 * 5) - \frac{(-2 - 1 + 0 + 1 + 2)(2 + 3 + 3 + 4 + 5)}{5}}{((-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2) - \frac{(-2 - 1 + 0 + 1 + 2)^2}{5}} = \frac{7}{2} = 0.7$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-2 - 1 + 0 + 1 + 2}{3} = 0 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{2 + 3 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{17}{5} = 3.4$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad 3.4 = a + (0.7 * 0) \quad a = 3.4$$

$$y = 3.4 + 0.7x$$

$$Xm = 1400 \rightarrow x = 1400 - 1397 = 3 \rightarrow y = 3.4 + (0.7 * 3) = 5.5$$

6) نمرات دانشجویان بشرح زیر است داده‌ها را در جدول زیر مرتب کنید. الف) مد(نما) داده‌ها چه مقدار است (چرا) ب). میانه داده‌ها چه مقدار است؟ - ج) صدک چهارم داده‌های را معلوم کنید - د) میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید. (30نمره)

x = نمره	17-20	11-14	14-17	8-11	5-8
f = تعداد	2	2	4	1	1
مرتب میکنیم					
X_m = نمره	5-8	8-11	11-14	14-17	17-20
f = تعداد	1	1	2	4	2
F	1	2	4	8	10
x = نمره	6.5	9.5	12.5	15.5	18.5

مد یا نما: همان داده ای است که بیشترین فراوانی (تعداد) را دارد که میشود 14-17 که بایستی دقیقاً مشخص کنیم چه عددی بین 14-17 میباشد

$$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) * C = L_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right) * C = 14 + \frac{4 - 2}{(4 - 2) + (4 - 2)} * 3 = 15.5$$

میانه: میانه = وسط صف منظم داده که $Q=1/2$

$$Q * \sum f_i = \frac{1}{2} (1 + 1 + 2 + 4 + 2) = 5$$

$$\rightarrow 5 + \rightarrow \frac{d}{F} \rightarrow F = 8 \rightarrow \frac{d}{X} \rightarrow x = 14 - 17$$

میانه عددی بین 14-17 است که برای تعیین دقیق آن

$$m = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 14 + \frac{\left(\frac{1}{2} \right) * (1 + 1 + 2 + 4 + 2) - 4}{4} * 3 = 14.75$$

صدک 14

$$Q * (\sum f_i) = (1 + 1 + 2 + 4 + 2) * \left(\frac{14}{100} \right) * 10 = 1.4$$

$$\rightarrow 1.4 + \rightarrow \frac{d}{F} \rightarrow F = 2 \rightarrow \frac{d}{X} \rightarrow x = 8 - 11$$

برای محاسبه دقیق صدک 14

$$Q = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 8 + \frac{(1 + 1 + 2 + 4 + 2) * \left(\frac{14}{100}\right) - 1}{1} * 3 =$$

$$Q = 8 + \frac{14 - 1}{1} * 3 = 9.2$$

میانگین با Xn

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(6.5 * 1) + (9.5 * 1) + (12.5 * 2) + (15.5 * 4) + (18.5 * 2)}{1 + 1 + 2 + 4 + 2} = \frac{140}{10} = 14$$

واریانس

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i} = \frac{(6.5 - 14)^2 * 1 + (9.5 - 14)^2 * 1 + (12.5 - 14)^2 * 2 + (15.5 - 14)^2 * 4 + (18.5 - 14)^2 * 2}{1 + 1 + 2 + 4 + 2}$$

$$\sigma^2 = 13.05 \quad \text{واریانس}$$

انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{13.05} = 3.6$$



sedighias220@yahoo.com