تحقیق در عملیات مقدماتی

روشهای حل مسائل تحقیق در عملیات مقدماتی

1- ترسیمی

2- روش سیمپلکس

3- روش M-

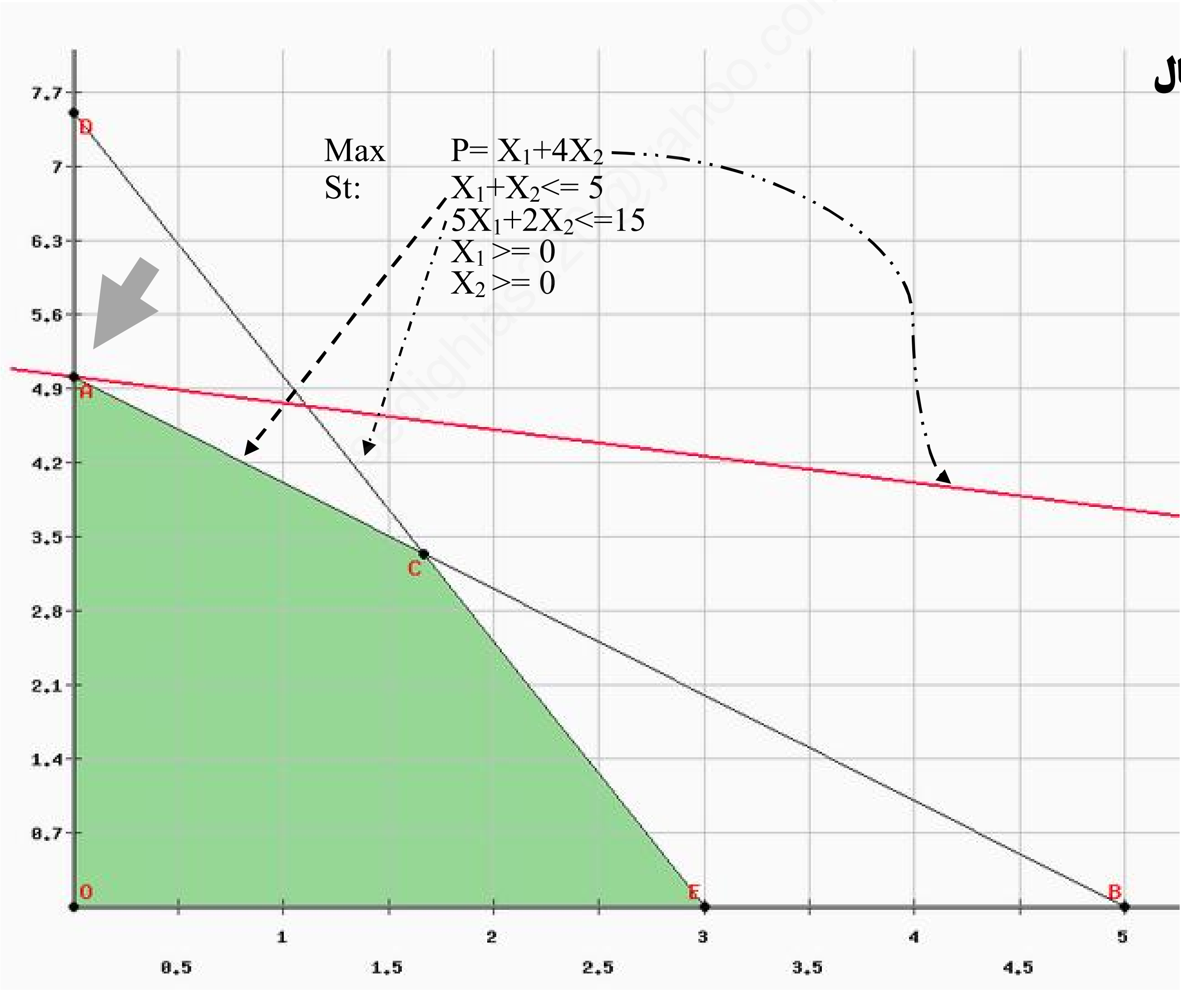
4- روش دوال

این مسئله برنامه ریزی خطی را به روش ترسیم نمایید

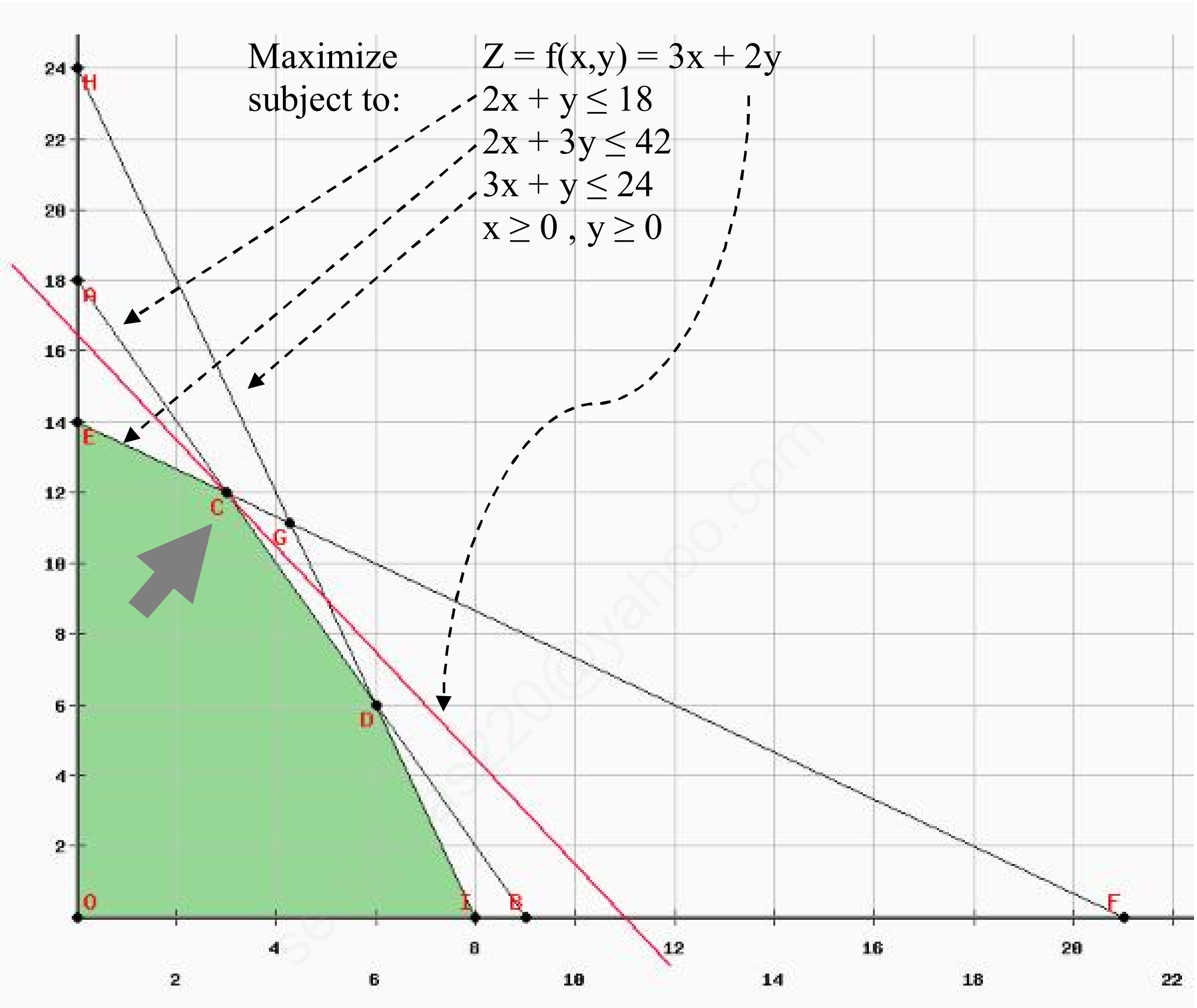
$$\begin{aligned} &Max \quad P = x_1 + 4x_2 \\ &St \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\qquad 5x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ &\qquad x_1 \geq 0 \\ &\qquad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

.روش ترسیمی

مثال



مثال :



از سایتهایی مثل www.phpsimplex.com و www.zweigmedia.com و نرم افزار اکسل هم میتوان استفاده نمود

حل مسائل برنامه ریزی خطی با نرم افزار MathLab

$Min\ \ C = 5y_1 + 15y_2$
$y_1 + 5y_2 \geq\ 1$
$y_1 + 2y_2 \geq\ 4$
$y_1 \geq\ 0$
$y_2 \geq\ 0$

****

همه نامساوی به کوچکتر یا مساوی تبدیل میکنیم

$Min\ \ C = 5y_1 + 15y_2$
$-y_1 - 5y_2 \leq\ -1$
$-y_1 - 2y_2 \leq\ -4$
$-y_1 \leq\ 0$
$-y_2 \leq\ 0$

****

فرمول زیر در مثلب جواب را ارائه میدهد

[x,fmin]=linprog(f,A,b,Aeq,Beq,lb,ub)

برای حل تمرین فوق اینچنین در m فایل مثلب مینویسیم و سپس اجرا میکنیم

```
f=[5;15];    A=[-1,-5;-1,-2];    b=[-1;-4];    Aeq=[];    Beq=[];
lb=[0;0];    ub=[inf;inf];
[x,fmin]=linprog(f,A,b,Aeq,Beq,lb,ub)
```

sedighias220@yahoo.com

مثال 1

در کارخانه ای دو نوع محصول با ستفاده از دو ماشین تهیه میشود. ماشین اول دارای محدودیت زمانی 5 ساعت در روز و ماشین دوم 15 ساعت در روز میباشد.هر یک واحد محصول اول 1 ساعت از ماشین اول و 5 ساعت از ماشین دوم و 1 تومان سود دارد و دومی بترتیب 1 ساعت و 2 ساعت و4 تومان سود دارد چه محصولی تولید شود با صرفه است؟

Max $P= X_1+4X_2$
St: $X_1+X_2<= 5$
$5X_1+2X_2<=15$

لازم بتذکر است که $X_1>=0$ و $X_2>=0$

1- تمام متغیرها بسمت چپ و اعداد ثابت بسمت راست میاوریم

تابع هدف $P-X_1-4X_2=0$
محدودیت ها $+X_1+X_2<= 5$
$+5X_1+2X_2<=15$

2- نامساویها با متغیر مجازی مساوی میکنیم

تابع هدف $P-X_1-4X_2=0$
محدودیت ها $+X_1+X_2+X_{s1} = 5$
$+5X_1+2X_2 +X_{s2} =15$

sedighias220@yahoo.com

3- (مرحله عملیات شروع) بعد از تشکیل جدول در سطر شماره 2 (سطر تابع هدف)منفی ترین عدد را انتخاب و آنرا ستون محور قرار داده و متغیر مربوطه (در اینجا X_2) متغیر ورود به پایه میباشد

1	1	2 X_1	3🡇 X_2	4 X_{s1}	5 X_{s2}	6 Cte	7 Ratio
2	P	-1	**-4**	0	0	0	
3	X_{s1}	1	1	1	0	5	
4	X_{s2}	5	2	0	1	15	

4- از تقسیم ستون ثابت Cte (ستون 6) بر ستون محور (نوشتن جواب در ستون Ratio) کمترین حاصل تقسیم مثبت را مشخص و سطر مربوط به آنرا مشخص میکنیم سطر محور نامیده و متغیر مربوط به این سطر محور متغیر خروجی

1	1	2 X_1	3🡇 X_2	4 X_{s1}	5 X_{s2}	6 Cte	7 Ratio
2	P	-1	**-4**	0	0	0	
3	←X_{s1}	1	***1***	1	0	5	5/1=**5** ⇦
4	X_{s2}	5	2	0	1	15	15/2= 7.5

در این جدول نقطه تقاطع ستون لولا و سطر لولا را سلول لولا مینامیم

سطر محور را بر عددی تقسیم میکنیم که سلول محور یک شود (همه این سطر بر عدد نقطه محور تقسیم) و در یک جدول جدید مینویسیم

1	1	2 X_1	3🡇 X_2	4 X_{s1}	5 X_{s2}	6 Cte	7 Ratio
2	P	-1	**-4**	0	0	0	
3	←X_{s1}	**1**	***1***	**1**	**0**	**5**	5/1=**5**⇦
4	X_{s2}	5	2	0	1	15	15/2=7.5
5	**P**	3	0	4	0	**20**	
6	**X_2**	1	1	1	0	**5**	
7	X_{s2}	3	0	-2	1	**5**	

در ستون محور عدد نقطه محور در عددی (مثبت یا منفی) ضرب و با اعداد دیگر این ستون جمع تا مقدار این اعداد دیگر صفر شود تا نهایتا غیر از عدد یک در نقطه محور بقیه اعداد این ستون صفر شوند و کلیه سطرها باید متناسبا انجام شود

5- اگر سطر 5 اعداد منفی نداشت جواب بهینه است و گرنه مجددا شبیه چندین سطرفوق (مرحله عملیات شروع) ادامه میدهیم

1	1	2 X_1	3🡇 X_2	4 X_{s1}	5 X_{s2}	6 Cte	7 Ratio
2	P	-1	**-4**	0	0	0	
3	←X_{s1}	**1**	***1***	**1**	**0**	**5**	5/1=**5**⇦
4	X_{s2}	5	2	0	1	15	15/2=7.5
5	**P**	3	0	4	0	**20**	
6	**X_2**	1	1	1	0	**5**	
7	X_{s2}	3	0	-2	1	**5**	

حال چون در سطر 5 عدد منفی نداریم بنابراین جواب بهینه است

$P=20 \qquad X_1=0 \qquad X_2=5 \qquad X_{s1}=0 \qquad X_{s2}=5$

ارزش سایه ای

از سطر 5 فوق میتوان گفت که اگر یک واحد(یک ساعت) که به ماشین اول اضافه شود 4 واحد(4 هزار تومان) به سود اضافه میکند . و اضافه کردن ساعات کار ماشین دوم اثری در سود ندارد.. به عدد 4 ارزش سایه ای ماشین اول گویند.

تعیین جوابهای دوال

جواب بهینه = جواب بهینه دوال

ضرایب متغیر های اصلی غیر پایه در سطر اول جواب بهینه = جواب متغیرهای اضافی پایه دوال

ضرایب متغیرهای اضافه غیرپایه در سطر اول جواب بهینه = جواب متغیرهای اصلی پایه دوال

در مثال فوق

$C=20 \qquad y_1=4 \qquad y_2=0 \qquad p_1=3 \qquad p_2=0$

مثال نمونه اول

$$\text{Max } Z=4X_1+3X_2$$
$$2X_1+3X_2<= 6$$
$$-3X_1+2X_2<=3$$
$$X_1>=0$$
$$X_2>=0$$

$$\text{Max } Z-4X_1-3X_2=0$$
$$2X_1+3X_2+S_1= 6$$
$$-3X_1+2X_2+S_2=3$$
$$X_1>=0 \quad S_1>=0$$
$$X_2>=0 \quad S2>=0$$

1	1	2⬇ x_1	3 x_2	4 s_1	5 s_2	6 Cte	7 Ratio
2	Z	-4	-3	0	0	0	در این سطر بزرگترین منفی ستون خروجی میشود
3	← s_1	2	3	1	0	6	در این ستون کوچکترین ⇦ 6/2=**3** عدد مثبت خروجی
4	s_2	-3	2	0	1	3	3/-3=-1
5	**Z**	0	3	2	0	12	
6	**X_1**	1	3/2	1/2	0/2	**3**	
7	s_2	0	13/2	3/2	0	12	

در سطر z منفی نداریم بنابراین جواب بهینه عبارت است از

$Z=12$ $x_1=3$ $x_2=0$ $s_1=0$ $s_2=12$

sedighias220@yahoo.com

مثال نمونه دوم

Max $Z=X_1+X_2$

$X_1+1/2X_2<=1$

$X_1+1/3X_2<=1$

$X_1>=0$

$X_2>=0$

Max $Z-X_1-X_2=0$

$X_1+1/2X_2+S_1= 1$

$X_1+1/3X_{22}+S_2=1$

$X_1>=0 \quad S_1>=0$

$X_2>=0 \quad S2>=0$

sedighias220@yahoo.com

	1	2 ↓	3	4	5	6	7
1		x_1	x_2	s_1	s_2	Cte	Ratio
2	Z	-1	-1	0	0	0	در این سطر بزرگترین منفی ستون خروجی میشود چون شبیه هستند یکی انتخاب میکنیم
3	← s_1	1	1/2	1	0	1	1/1=**1**⇦ در این ستون کوچکترین عدد مثبت چون نسبت ها مساوی بود یکی انتخاب
4	s_2	1	1/3	0	1	1	1/1=1
5	**Z**	0	-1/2	1	0	1	در این سطر بزرگترین منفی ستون خروجی میشود
6	**X_1**	1	1/2	1	0	1	1/(1/2)=**2** ⇦ در این ستون کوچکترین نسبت با عدد مثبت
7	s_2	0	-1/6	-1	1	0	0/(-1/6) =0
5	Z	2	0	3	0	3	
6	X2	2	1	2	0	2	
7	S2	1/3	0	-2/3	1	1/3	

در سطر Z منفی نداریم بنابراین جواب بهینه عبارت است از

$Z=2$　　$x_1=0$　　$x_2=2$　　$s_1=0$　　$s_2=1/3$

sedighias220@yahoo.com

اگر از ابتدا دومی پایه میشد سریع جواب بدست میامد ??? مجدد بررسی شود

1		x_1	x_2	s_1	s_2	Cte	Ratio
2	Z	-1	-1	0	0	0	در این سطر بزرگترین منفی ستون خروجی میشود چون شبیه هستند یکی انتخاب میکنیم
3	s_1	1	1/2	1	0	1	در این ستون کوچکترین عدد مثبت ⇦**2**=1/(1/2)
4	←s_2	1	1/3	0	1	1	1/(1/3)=3
5	Z	1	0	2	0	2	
6	X2	2	1	2	0	2	
7	S2	1	1/3	0	1	1	

در سطر z منفی نداریم بنابراین جواب بهینه عبارت است از

$Z=2$ $x_1=0$ $x_2=2$ $s_1=0$ $s_2=1/3$

sedighias220@yahoo.com

مثال دوم

$$Min\ \ C = 5y_1 + 15y_2$$
$$St\colon\ y_1 + 5y_2 \geq 1$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 4$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

$$C - 5y_1 - 15y_2 = 0$$
$$y_1 + 5y_2 - p_1 = 1$$
$$y_1 + 2y_2 - p_2 = 4$$

$$C - 5y_1 - 15y_2 = 0$$
$$-y_1 - 5y_2 + p_1 = -1$$
$$-y_1 - 2y_2 + p_2 = -4$$

منفی ترین عدد در ستون CV مشخص میکنیم که عدد 4- میشود

حال سطر مرتبط با این عدد منفی را سطر لولا مینامیم و متغیر مربوطه در این سطر لولا را متغیر خروج مینامیم (در اینجا متغیر خروج P2)

در سطری بنام Ratio سطر تابع هدف را بر این سطر لولا تقسیم میکنیم در سطر Ratio کمترین عدد مثبت را مشخص و متغیر ستون مرتبط(ستون لولا) را متغیر ورود به پایه گویند.(در اینجا متغیر ورود y1)

سلول لولا محل تقاطع سطرلولا و ستون لولا را مشخص میکنیم (در اینجا 1-)

سپس عملیات یکه نمودن را برای آن سطر و ستون انجام میدهیم یعنی

باید سلول لولا یک شود پس سلول لولا بر خودش تقسیم میکنیم یعنی بر 1- تقسیم میکنیم تا سلول لولا یک شود

حال باید همه سطر لولا باید بر همین 1- تقسیم کنیم

جدول دوم را ملاحظه میکنید با یکه شدن سلول لولا

بالای سلول لولا باید صفر شود باید ببینیم سلول لولا در چه عددی ضرب با بالای خودش جمع کنیم تا صفر شود

سپس برای کل آن سطرهای بالایی همین ضرب و جمع مشابه انجام دهیم

در ستون CV حاصله اگر اعداد همه مثبت شوند جواب مطلوب وگرنه باید ادامه دهیم

	y1↓	y2	p1	p2	cv
C	-5	-15	0	0	0
p1	-1	-5	1	0	-1
←p2	***-1***	-2	0	1	-4
ratio	-5/-1⇧	-15/-2			
C	0	-5	0	-5	20
p1	0	-3	1	-1	3
y1	1	2	0	-1	4
ratio					

بنابراین جواب بهینه

C=20 y1=4 y2=0 p1=3 p2=0

sedighias20@yahoo.com

تحقیق در عملیات پیشرفته

مثال - این تمرین را حل کنید

Max : Z= -X1-2X2-X3
2X1+5X2+5X3 >= 6
X1+X2+X3 >= 2

حل : به روش M -

چون در محدودیتها جواب پایه نمیتوان پیدا کرد یک جواب مصنوعی میسازیم
در محدودیتها اگر کوچکتر یا مساوی بود فقط متعیر کمکی Xsi+ اضافه میکنیم
در محدودیتها اگر بزرگتر یا مساوی بود متعیر کمکی Xsi- اضافه میکنیم و همچنین متغیر مصنوعی Xai+ اضافه میکنیم
در محدودیتها اگر مساوی بود فقط متعیر مصنوعی Xai+ اضافه میکنیم
اگر تابع هدف max بود بتعداد در محدودیتها متغیر کمکی Mxai– و اگر تابع هدف min بود بتعداد در محدودیتها متغیر کمکی MXai+ اضافه میکنیم

Z= -X1 -2X2 -X3 -MXa1-MXa2
2X1+5X2+5X3-Xs1 +Xa1 = 6
X1+ X2 +X3 -Xs2 +Xa2 = 2

اولین سطر بالا ضرایب تابع هدف است
ستون X نام متغیرهای با ماتریس یکه در محدودیتها باید باشد
ستون C ضرایب متغیرهای کمکی و مصنوعی در تابع هدف با توجه به ستون متناظر X خواهد بود
ستون b مقادیر ثابت تابع هدف میباشد
سطر تابع هرف از حاصلضرب ستون ثابت b در ستون C و تفریق آن از بالاترین سطر جدول(ضرایب تابع هدف) خواهد بود
در سطر Z کمترین عدد تعیین نموده و ستون آنرا مشخص میکنیم (ستون لولا) متغیر این ستون متغیر ورود به پایه است
نسبت اعداد ستون **b** بر ستون لولا را بدست آورده و سطر مربوط به کمترین نسبت را مشخص (سطر لولا) متغیر مربوط به این سطر متغیر خروج از پایه است

		-1	-2	-1	0	0	این سطر ضرایب تابع هدف اولیه	
C	X	y1	y2	y3	ys1	ys2	مقدار ثابتb	نسبتθ
-M	Xa1←	2	5	5	-1	0	6	6/5⇨
-M	Xa2	1	1	1	0	-1	2	2/1
*کمترین در سطر	Z	-3M+1	-6M+2	-6M+1↑	M	M	-8M	**کمترین در ستون
-1	X3	2/5	5/5	5/5	-1/5	0	6/5	6/2
-M	Xa2←	3/5	0	0	1/5	-1	4/5	4/3⇨
	Z	-3/5M+3/5↑	1	0	-1/5M+1/5	M	-4/5M-6/5	
-1	X3	0	1	1	-1/3	2/3	2/3	
-1	X1	1	0	0	1/3	-5/3	4/3	
	Z	0	1	0	0	1	-2	

چون در سطر Z ضریب متغیرها عدد منفی نداریم پس بهینه است

بنابراین جواب بهینه

X1=4/3 X2=0 X3=2/3 Z=-2

sedighias220@yahoo.com

مثال فوق با M بزرگ با شکلی دیگر

$$\text{Max}: Z = -X_1-2X_2-X_3$$
$$2X_1+5X_2+5X_3 >= 6$$
$$X_1+X_2+X_3 >= 2$$
$$Z = -X_1 \ -2X_2 \ -X_3 \ -MR_1-MR_2$$
$$2X_1+5X_2+5X_3-S_1 \quad +R_1 \quad = 6$$
$$X_1+X_2 \quad +X_3 \quad -S_2 \quad +R_2 = 2$$

$$\text{Max}: Z = -X_1-2X_2-X_3$$
$$\text{St} \quad 2X_1+5X_2+5X_3 >= 6$$
$$X_1+X_2+X_3 >= 2$$
$$X_1>=0$$
$$X_2>=0$$
$$X_3>=0$$

$$\text{Max}: Z = -X_1-2X_2-X_3$$
$$\text{St} \quad 2X_1+5X_2+5X_3-S_1 = 6$$
$$X_1+X_2+X_3 \ -S_2 \quad = 2$$
$$X_1>=0$$
$$X_2>=0$$
$$X_3>=0$$

$$\text{Max}: Z = -X_1-2X_2-X_3-MR_1-MR_2$$
$$\text{St} \quad 2X_1+5X_2+5X_3-S_1 \ +R_1 \quad = 6$$
$$X_1+X_2+X_3 \qquad -S_2 \ +R_2 = 2$$
$$X_1>=0$$
$$X_2>=0$$
$$X_3>=0$$

$$\text{Max}: Z = -X_1-2X_2-X_3-MR_1-MR_2$$
$$R_1 = 6-2X_1-5X_2-5X_3+S_1$$
$$R_2 = 2- X_1-X_2-X_3+S_2$$
$$X_1>=0$$
$$X_2>=0$$
$$X_3>=0$$

$$Z == -X_1-2X_2-X_3-M(6-2X_1-5X_2-5X_3+S_1)-M(2-X_1-X_2-X_3+S_2)$$
$$Z = (-1+3M)X_1+(-2+6M)X_2+(-1+6M)X_3-8M -MS_1-MS_2$$

$$\text{MAX } Z+ (1-3M)X_1+(2-6M)X_2+(1-6M)X_3+MS_1+MS_2 = -8M$$
$$\text{St} \quad 2X_1+5X_2+5X_3-S_1 \ +R_1 \quad = 6$$
$$X_1+X_2+X_3 \qquad -S_2 \ +R_2 = 2$$
$$X_1>=0$$
$$X_2>=0$$
$$X_3>=0$$

	X_1	X_2	X_3 ⬇	S_1	S_2	R_1	R_2	Cte	Ratio
Z	1-3M	2-6M	1-6M	+M	+M	0	0	-8M	
R_1	2	5	5	-1	0	1	0	6	6/5 ⇦
R_2	1	1	1	0	-1	0	1	2	2/1
Z	3/5-3/5M ⬇	1	0	1/5-1/5M	+M	-1/5+6/5M	0	-6/5-4/5M	
X_3	2/5	5/5	1	-1/5	0	1/5	0	6/5	(6/5)/(2/5)
R_2	3/5	0	0	1/5	-1	-1/5	1	4/5	(4/5)/(3/5) ⇦
Z	0	1	0	0	1	M	M	-2	
X_3	0	1	1	-1/3	2/3	17/15	-2/3	2/3	
X_1	1	0	0	1/3	-5/3	-1/3	5/3	4/3	

sedighias220@yahoo.com

مثال دیگری از M بزرگ

Min $Z=4X_1+X_2$

St $3X_1+X_2=3$

$4X_1+3X_2>=6$

$X_1+2X_2<=3$

$X_1>=0$

$X_2>=0$

Max $-Z=-4X_1-X_2$

St $3X_1+X_2 \quad =3$

$4X_1+3X_2-S_1 \quad =6$

$X_1+2X_2 \quad +S_2=3$

$X_1>=0$

$X_2>=0$

Max $-Z=-4X_1-X_2-MR_1-MR_2$

St $3X_1+X_2 \quad +R_1 \quad =3$

$4X_1+3X_2-S_1 \quad +R_2 \quad =6$

$X_1+2X_2 \quad +S_2 \quad =3$

$X_1>=0$

$X_2>=0$

Max $-Z=-4X_1-X_2-MR_1-MR_2$

$R_1=3-3X_1-X_2$

$R_2=6-4X_1-3X_2+S_1$

$X_1+2X_2+S_2=3$

$X_1>=0$

$X_2>=0$

$-Z=-4X_1-X_2-M(3-3X_1-X_2)-M(6-4X_1-3X_2+S_1)=-4X_1-X_2-3M+3MX_1+MX_2-6M+4MX_1+3MX_2-MS_1$

$-Z=(-4+7M)X_1+(-1+4M)X_2-9M-MS_1$

MAX $-Z+(4-7M)X_1+(1-4M)X_2+MS_1=-9M$

St $3X_1+X_2 \quad +R_1 \quad =3$

$4X_1+3X_2-S_1 \quad +R_2 \quad =6$

$X_1+2X_2 \quad +S_2 \quad =3$

$X_1>=0$

$X_2>=0$

	X_1 ⬇	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Cte	Ratio
Z	4-7M	1-4M	+M	0	0	0	-9M	
R_1	3	1	0	0	1	0	3	3/3 ⇦
R_2	4	3	-1	0	0	1	6	6/4
S_2	1	2	0	1	0	0	3	3/1
Z	0	-1/3-5/3M⬇	+M	0	-4/3+7/3M	0	-4-2M	
X_1	1	1/3	0	0	1/3	0	3/3	3
R_2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	6/5⇦
S_2	0	5/3	0	0	-1/3	0	2	6/5
Z		0	-1/5	0	8/5+M	1/5+M	-18/5	
X_1		0	1/5	0	3/5	-1/5	3/5	
R_2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5	
S_2		0	1	0	1	-1	0	

sedighias220@yahoo.com

مثال –

Max : Z= -X1-2X2-X3
2X1+5X2+5X3 >= 6
X1+X2+X3 >= 2

حل : به روش دو فاز

یک تابع هدف مصنوعی میسازیم

Max : Z* = -Xa1-Xa2
2X1+5X2+5X3-Xs1 +Xa1 >= 6
X1+ X2+ X3 -Xs2 +Xa2 >= 2

در سطر Z* کمترین عدد بعنوان ورود به پایه و ستون مربوطه ستون لولا نامیم و متغیر مربوط به این سطر متغیر متغیر ورود به پایه است

کمترین نسبت b’ بر ستون لولا را مشخص و سطر مربوطه سطر لولا نامیم و متغیر مربوطه متغیر خروج ار پایه میباشد.

		0	0	0	0	0	ضرایب در هدف	
C	X	y1	y2	y3	ys1	ys2	b’	نسبت θ
-1	Xa1 ←	2	5	5	-1	0	6	6/5⇨
-1	Xa2	1	1	1	0	-1	2	2/1
کمترین در سطر	Z*	-3	-6	-6↑	1	1	-8	کمترین در ستون
0	X3	2/5	5/5	1	-1/5	0	6/5	6/2
-1	Xa2 ←	3/5	0	0	1/5	-1	4/5	4/3⇨
	Z*	-3/5↑	0	0	-1/5	1	-4/5	
0	X3	0	1	1	-1/3	2/3	2/3	
0	X1	1	0	0	1/3	-5/3	4/3	
	Z*	0	0	0	0	0	0	

چون سطر $Z^*=0$ گردید این یک جواب برای Z میباشد

		ضرایب در هدف	-1	-2	-1	0	0
			y1	y2	y3	ys1	ys2
-1	X3	2/3	0	1	1	-1/3	2/3
-1	X1	4/3	1	0	0	1/3	-5/3
	Z	-2	0	1	0	0	1

چون در سطر Z ضرایب متغیرها غیر منفی است پس بهینه است

$X1=4/3$ $X2=0$ $X3=2/3$ $Z=-2$

sedighias220@yahoo.com

مثال –

Max : Z= -X1-2X2-X3
2X1+5X2+5X3 >= 6
X1+X2+X3 >= 2

حل : به روش دوال

Z+X1+2X2 +X3 = 0
2X1+5X2+5X3-Xs1 = 6
X1 +X2 +X3 -Xs2 = 2

Z +X1+2X2+X3 = 0
-2X1-5X2-5X3+Xs1 = -6
-X1 -X2 -X3 +Xs2 = -2

در ابتدا در ستون **b** کمترین عدد مشخص و سطر مربوطه سطر لولا نامند و متغیر مربوطه متغیر خروج از پایه میباشد سطر Z بر آن ستون تقسیم و کمترین نسبت تقسیم را مشخص و ستون مربوطه ستون لولا گویند و متغیر مربوطه متغیر ورود به پایه نامند

C	**X**	**b**	y1↓	y2	y3	ys1	ys2
0	Xs1	-6←	***-2***	-5	-5	1	0
0	Xs2	-2	-1	-1	-1	0	1
	Z	0	1	2	1	0	0
سطر نسبت θ	کمترین ; در سطر	کمترین در ستون	1/-2⇧	2/-5	1/-5		
-1	X1	-6/-2	1	-5/-2	-5/-2	1/-2	0
0	Xs2	1←	0	1.5	***1.5***	-0.5	1
	Z	-3	0	-0.5	-1.5	0.5	0
				-0.5/1.5	-1.5/1.5 ⇧	0.5/0.5	0/1
-1	X1	4/3	1	0	0	1/3	-5/3
-1	X3	2/3	0	1	1	-1/3	2/3
	Z	-2	0	1	0	1	1

چون در سطر Z عدد منفی نداریم و در ستون عدد ثابت عدد منفی نداریم پس جواب بهینه است.

X1= 4/3　　X2= 0　　X3= 2/3　　Z= -2

مثال

Max : Z= -X1-2X2-X3
2X1+5X2+5X3 >= 6
X1+X2+X3 >= 2

حل به روش سیمپلکس اصلاح شده

Max : Z*= -Xa1-Xa2

$$\begin{array}{lllllll}
Z+ & X1+2X2+X3 & & & & & =0 \\
Z^* & & & & & +Xa1+Xa2 & =0 \\
 & 2X1+5X2+5X3 & -Xs1 & & +Xa1 & & =6 \\
 & X1+\ X2+\ X3 & & -Xs2 & & +Xa2 & =2
\end{array}$$

یک مثال از نحوه محاسبه

$$ZB \quad (1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad ZB= 0$$

$$Z^*B \quad (0\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ -1\ ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -\ 8 \qquad Z^*B= -8$$

$$\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & s_1 & s_2 & b \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Zj-Cj تشکیل میدهیم که اگر منفی نداشت یعنی جواب بهینه است
در سطر *Z میتوان ملاحظه نمود (1- , 1- , 1 , 0) پس میتوان نوشت

$$j=1 \quad (0\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ -1\ ) \begin{array}{c} a_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} = -3 \qquad Z1-C1= -3$$

و بهمین نحوه برای دیگر موارد آنگاه جدول ذیل حاصل میشود

j	1	2⇓	3	S1	S2
Zj-Cj	-3	***-6***	-6	1	1

منفی ترین انتخاب میکنیم - اگر متغیر 3 وارد پایه شود سریعتر به جواب میرسیم ولی فرض کنید متغیر دوم ورود به پایه باشد

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

θ	X	b	β0	β1	β2	β3	y2	
	Z	0	1	0	0	0	2	
کمترین در ستون	Z*	-8	0	1	-1	-1	-6	
6/5	Xa1 ⇐	6	0	0	1	0	5	
2/1	Xa2	2	0	0	0	1	1	
	Z	-12/5	1	0	-2/5	0	0	
	Z*	-4/5	0	1	1/5	-1	0	
	X2	6/5	0	0	1/5	0	5/5	
	Xa2	4/5	0	0	-1/5	1	0	

مجددا Zj-Cj تشکیل میدهیم که اگر منفی نداشت یعنی جواب بهینه است
در سطر Z* میتوان ملاحظه نمود (1- , 1/5 , 1 , 0) پس میتوان نوشت

$$j=1 \quad (0 , 1 , 1/5 , -1) \overset{a_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}} = -3/5 = -0.6 \qquad Z1\text{-}C1= -0.6$$

$$j=2 \quad (0 , 1 , 1/5 , -1) \overset{a_2}{\begin{pmatrix}2\\0\\5\\1\end{pmatrix}} = 0 \qquad Z2\text{-}C2=0$$

و بهمین نحوه برای دیگر موارد آنگاه جدول ذیل حاصل میشود

j	1⇓	2	3	S1	S2
Zj-Cj	***-0.6***	0	0	1	1

$$y_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2/5 & 0\\0 & 1 & 1/5 & -1\\0 & 0 & 1/5 & 0\\0 & 0 & -1/5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.2\\-0.6\\0.4\\0.6\end{bmatrix}$$

جدول آخری را نوشته ستون y1 اضافه میشود (y1 میخواهیم وارد پایه کنیم)

sedighias20@yahoo.com

θ	X	b	β0	β1	β2	β3	y1
	Z	-12/5	1	0	-2/5	0	0.2
کمترین در ستون	Z*	-4/5	0	1	1/5	-1	-0.6
(6/5) / 0.4 = 3	X2	6/5	0	0	1/5	0	0.4
(4/5) / 0.6=1.33	Xa2 ⇐	4/5	0	0	-1/5	1	0.6
	Z	-8/3	1	0	-1/3	-1/3	0
	Z*	0	0	1	0	0	0
	X2	2/3	0	0	1/3	-2/3	0
	X1	0.8/0.6= 4/3	0	0	-0.2/0.6=-1/3	1/0.6=5/3	0.6 / 0.6=1

با توجه به جدول (در سطر Z^*) وارد فاز 2 میشویم و از این به بعد از Z استفاده میکنیم
مجددا $Z_j - C_j$ تشکیل میدهیم که اگر منفی نداشت یعنی جواب بهینه است
در سطر Z میتوان ملاحظه نمود (1/3- , 1/3- , 0 , 1) پس میتوان نوشت

$$j=1 \quad (1, 0, -1/3, -1/3) \overset{a_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = 0 \qquad Z1-C1= 0$$

$$j=2 \quad (1, 0, -1/3, -1/3) \overset{a_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}} = 0 \qquad Z2-C2=0$$

و بهمین نحوه برای دیگر موارد آنگاه جدول ذیل حاصل میشود

j	1	2	3⇓	S1	S2
Zj-Cj	0	0	***-1***	1/3	1/3

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sedighias22@yahoo.com

θ	X	b	β0	β1	β2	β3	y3
	Z	-8/3	1	0	-1/3	-1/3	-1
کمترین در ستون	Z*	0	0	1	0	0	0
(2/3)/1= 2/3	X2⇐	2/3	0	0	1/3	-2/3	1
(4/3)/0=بین هایت	X1	4/3	0	0	-1/3	5/3	0
	Z	-2	1	0	0	-1	0
	Z*	0	0	1	0	0	0
	X3	2/3	0	0	1/3	-2/3	1
	X1	4/3	0	0	-1/3	5/3	0

مجددا Zj-Cj تشکیل میدهیم که اگر منفی نداشت یعنی جواب بهینه است
در سطر Z میتوان ملاحظه نمود (1- , 0 , 0 , 1) پس میتوان نوشت

$$j=1 \quad (1, 0, 0, -1)\overset{a_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}} = 0 \qquad Z1-C1=0$$

$$j=2 \quad (1, 0, 0, -1)\overset{a_2}{\begin{pmatrix}2\\0\\5\\1\end{pmatrix}} = 1 \qquad Z2-C2=1$$

و بهمین نحوه برای دیگر موارد آنگاه جدول ذیل حاصل میشود

j	1	2	3	S1	S2
Zj-Cj	0	1	0	0	1

چون در Zj-Cj عدد منفی نداریم پس جواب بهینه است

X1=4/3 X2=0 X3=2/3 Z= - 2

برنامه ریزی پارامتریک

(ضرایب برنامه ریزی خطی بصورت پارامتری تغییر دهیم)

صاحب یک کارگاه با ترکیب دو نوع فلز کاری و چوبکاری سه نوع کالا انجام میدهد بشرح جدول زیر - در یک دوره زمانی ظرفیت چوبکاری 24 نفر ساعت و ظرفیت فلزکاری 60 نفر ساعت میباشد – بیشترین سود را برنامه ریزی کنید

میزان مصرف در هر کالا	کالای 1	کالای 2	کالای 3	حد اکثر منبع
چوبکاری	½	2	1	24
فلزکاری	1	2	4	60
سود	6	14	13	

Max $z=6X_1+14X_2+13X_3$ $\qquad z-6X_1-14X_2-13X_3=0$

$1/2X_1+2X_2+X_3<=24 \qquad 1/2X_1+2X_2+X_3+1X_4+0X_5=24$

$1X_1+2X_2+4X_3<=60 \qquad 1X_1+2X_2+4X_3+0X_4+1X_5=60$

$X_1>=0 \quad X_2>=0 \quad X_3>=0$

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_4	24	½	2	1	1	0
X_5	60	1	2	4	0	1
Z	0	-6	-14	-13	0	0

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_4	24	½	2	1	1	0	ب -کمترین نسبت 24/2 خروجی
X_5	60	1	2	4	0	1	60/2
Z	0	-6	-14	-13	0	0	الف- منفی ترین خروجی

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_2	24/2	½/2	2/2	1/2	1/2	0/2	سلول را یکه میکنیم
X_5	60	1	2	4	0	1	
Z	0	-6	-14	-13	0	0	

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_2	12	1/4	1	1/2	1/2	0	12/(1/2)=24
X_5	36	1/2	0	3	-1	1	ب- کمترین 36/3=12
Z	168	-5/2	0	-6	7	0	الف- منفی ترین -6

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_2	12	1/4	1	1/2	1/2	0	12/(1/2)=24
X_5	36	1/2	0	3	-1	1	ب- کمترین 36/3=12
Z	168	-5/2	0	-6	7	0	الف- منفی ترین -6

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_2	6	2/12	1	0	4/6	-1/6	12/(1/2)=24
X_3	36/3	1/2/3	0/3	1	-1/3	1/3	ب- کمترین 36/3=12
Z	168+72	-3/2	0	0	5	2	الف- منفی ترین -6

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_2	6	1/6	1	0	2/3	-1/6	ب- 6/(1/6)=36 کمترین خروجی
X_3	12	1/6	0	1	-1/3	1/3	12/(1/6)=72
Z	240	-3/2	0	0	5	2	الف منفی ترین -3/2

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_1	36	1	6	0	4	-1	
X_3	6	0	-1	1	-1	½	
Z	240+36*(3/2)	0	9	0	11	1/2	

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_1	36	1	6	0	4	-1	
X_3	6	0	-1	1	-1	½	
Z	294	0	9	0	11	1/2	

الف) برنامه ریزی پارامتریک سمت راست

حال فرض کنید صاحب کارگاه قادر است هرساعت ظرفیت چوبکاری را به یک ساعت ظرفیت فلزکاری تبدیل کند و بالعکس

صاحب کارگاه میخواهد بداند ظرفیتها را به چه میزان تغییر دهد تا بیشترین سود عاید شود

پس جدول اولیه چنین میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_4	24+t	½	2	1	1	0
X_5	60-t	1	2	4	0	1
Z	0	-6	-14	-13	0	0

طبق جداول فوق در حین حل ستون راست چنین تغییراتی داشت

متغیر پایه	سمت راست				
X_4	24=A	A/2=A1	B2*(-1/2)+A1=A2	A2/(1/6)=A3	
X_5	60=B	-A1*2+B=B1	B1/3=B2	B2+A3*(-1/6)	
Z	0=C	A1*14=Z2	Z2+(B2*6)=Z3	Z3+A3*(3/2)	

بنا بر شرح فوق جدول نهایی با شرح فوق چنین میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_1	36+5t	1	6	0	4	-1	
X_3	6-3/2t	0	-1	1	-1	½	
Z	294+21/2t	0	9	0	11	1/2	

حال باید

36-5t >= 0   6-2/3t >= 0   -7 1/5 =< t <= 4

حال اگر   t<= -7 1/5 باشد در جدول فوق X_5 وارد پایه شده و X_1 خارج میشود و نهایتا جدول بصورت زیر میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_5	-36-5t	-1	-6	0	-4	1	
X_3	24+t	1/2	1	1	1	0	
Z	312+13t	1/2	12	0	13	0	

حال

-36-5t >= 0 24+ t <= 0   -24 =< t <= -7 1/5 z=312+13t

برای t=4 بیشترین Z را خواهیم داشت

یعنی چهار ساعت از فلزکاری کم و به چوبکاری اضافه شود سود بیشتر میشود

ب) برنامه ریزی پارامتریک تابع هدف

اگر در تمرین اولیه فوق فرض کنیم یک واحد افزایش قیمت X1 معادل دو واحد افزایش قیمت X_2 و X_3 بشود نقطه بهینه Z کجاست

جدول بصورت زیر میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_4	24	½	2	1	1	0
X_5	60	1	2	4	0	1
Z	0	-6-T	-14-2T	-13-2T	0	0

که نهایتا بصورت زیر میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	36	1	6	0	4	-1
X_3	6	0	-1	4	-1	1/2
Z	294+48T	0	9+2T	0	11+2T	1/2

9+2T>=0   11+2T>=0   -4/5<=T<=INF   Z=294+48T

برای T<= -4/5 جدول بصورت زیر میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_2	6	-1/6	1	0	2/3	-1/6
X_3	12	1/6	0	1	-1/3	1/2
Z	240+36T	-3/2-1/3T	0	0	5+2/3T	2+T/3

نموداری محدب میشود

حمل و نقل

روش گوشه شمال غربی

کارخانه ای سه محصول تولید و عرضه میکند(S1=7-S2=9-S3=18) در چهار محل تقاضا برای مصرف داریم (D1=5,D2=8,D3=7,D4=14) هزینه حمل در جدول زیر آمده – برای حمل کل کالا از منبع به مقصدها به طوریکه هزینه حداقل شود چه مقدار به چه محل انجام شود

	D_1	D_2	D_3	D_4	S عرضه
S_1	19	30	50	10	7
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	7	14	18
D تقاضا	5	8	7	14	34 – 34

در سطر و ستون عرضه و تقاضا مرتبط با این گوشه شمال غربی حداقل بین عرضه و تقاضا در نظر میگیریم بین 5و7 کمترین مقدار انتخاب و در سلول D1S1 گذارده و سپس در ستون عرضه و تقاضای مرتبط اختلاف با این مقدار درج میکنیم

	D_1	D_2	D_3	D_4	S عرضه
S_1	5	30	50	10	7-5=2
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	7	14	18
D تقاضا	5-5=0	8	7	14	(34-5) (34-5)

حال سطر یا ستون صفر شده را حذف میکنیم (ستون D1 را حذف میکنیم)

	D_2	D_3	D_4	S عرضه
S_1	30	50	10	2
S_2	30	40	60	9
S_3	8	7	14	18
D تقاضا	8	7	14	(29) (29)

در سطر و ستون عرضه و تقاضا مرتبط با این گوشه شمال غربی حداقل بین عرضه و تقاضا در نظر میگیریم بین 2و 8 کمترین مقدار انتخاب و در سلول D2S1 گذارده و سپس در ستون عرضه و تقاضای مرتبط اختلاف با این مقدار درج میکنیم

	D_2	D_3	D_4	Sعرضه
S_1	2	50	10	2-2
S_2	30	40	60	9
S_3	8	7	14	18
Dتقاضا	8-2	7	14	(29-2) (29-2)

حال سطر یا ستون صفر شده را حذف میکنیم (سطر S1 را حذف میکنیم)

	D_2	D_3	D_4	Sعرضه
S_2	30	40	60	9
S_3	8	7	14	18
Dتقاضا	6	7	14	(27) (27)

در سطر و ستون عرضه و تقاضا مرتبط با این گوشه شمال غربی حداقل بین عرضه و تقاضا در نظر میگیریم بین 9و 6 کمترین مقدار انتخاب و در سلول D2S2 گذارده و سپس در ستون عرضه و تقاضای مرتبط اختلاف با این مقدار درج میکنیم

	D_2	D_3	D_4	Sعرضه
S_2	6	40	60	9-6
S_3	8	7	14	18
Dتقاضا	6-6	7	14	(27-6) (27-6)

حال سطر یا ستون صفر شده را حذف میکنیم (سطر S1 را حذف میکنیم)

	D_3	D_4	Sعرضه
S_2	40	60	3
S_3	7	14	18
Dتقاضا	7	14	(21) (21)

واین روش را ادامه میدهیم

	D_3	D_4	Sعرضه
S_2	3	60	3-3
S_3	7	14	18
Dتقاضا	7-3	14	(21-3) (21-3)

	D_3	D_4	عرضهS
S_3	7	14	18
تقاضاD	4	14	(18) (18)

	D_3	D_4	عرضهS
S_3	4	14	18-4
تقاضاD	4-4	14	(18-4) (18-4)

	D_4	عرضهS
S_3	14	14
تقاضاD	14	(14) (14)

پس

S3D4=14   S3D3=4   S2D3=3   S2D2=6   S1D2=2   S1D1=5

Cost =5*19+2*30+6*30+3*40+4*70+14*20=1015

sedighias220@yahoo.com

روش مینیمم سطر

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	19	30	50	10	7
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	70	20	18
تقاضا D	5	8	7	14	34 – 34

بترتیب از سطر اول شروع کرده و در این سطر به آن سلول که دارای هزینه مینمم مقدار مینیمم بین عرضه و تقاضا (7) به سلول تخصیص میدهیم و بقیه تقاضا در این سطر صفر میگذاریم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	0	0	0	7	7-7=0
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	70	20	18
تقاضا D	5	8	7	14-7	(34-7) – (34-7)

S1D4=7

سطر اول S1 را حذف در نظر گرفته و به سطر بعدی S2 توجه میکنیم در این سطر به آن سلول که دارای هزینه مینمم است مقدار مینیمم بین عرضه و تقاضا(8) به سلول تخصیص میدهیم و بقیه تقاضا در این ستون صفر میگذاریم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	70	20	18
تقاضا D	5	8	7	7	(27) – (27)

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_2	70	8	40	60	9-8
S_3	40	0	70	20	18
تقاضا D	5	8-8	7	7	(27-8) – (27-8)

S2D2=8

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_2	70	8	40	60	1
S_3	40	0	70	20	18
تقاضا D	5	0	7	7	(19) – (19)

ستون دوم D2 را حذف در نظر گرفته و مجددا به سطر دوم S2 توجه میکنیم در این سطر به آن سلول که دارای هزینه مینمم است مقدار مینیمم بین عرضه و تقاضا(1) به سلول تخصیص میدهیم و بقیه تقاضا در این سطر صفر میگذاریم

	D_1	D_3	D_4	عرضه S
S_2	70	40	60	1
S_3	40	70	20	18
تقاضا D	5	7	7	(19) – (19)

	D_1	D_3	D_4	عرضه S
S_2	0	1	0	1-1
S_3	40	70	20	18
تقاضا D	5	7-1	7	(19-1) – (19-1)

S2D3=1

سطر دوم S2 را حذف در نظر گرفته و به سطر سوم S3 توجه میکنیم در این سطر کل تقاضاهای مانده را تخصیص میدهیم

	D_1	D_3	D_4	عرضه S
S_3	40	70	20	18
تقاضا D	5	6	7	(18) – (18)

	D_1	D_3	D_4	عرضه S
S_3	5	6	7	18
تقاضا D	5	6	7	(18) – (18)

بنابراین جواب مسئله بصورت زیر است

seddighias20@yahoo.com

	D_1	D_2	D_3	D_4	Sعرضه
S_1				7	7
S_2		8	1		9
S_3	5		6	7	18
Dتقاضا	5	8	7	14	

S1D4=7 S2D2=8 S2D3=1 S3D1=5 S3D3=6 S3D4=7

Cost = 7*10+8*30+1*40+5*40+6*70+7*20=1110

روش گوشه شمال غربی و مینیم سطر ملاحظه شد و ملاحظه شد که روش گوشه شمال غربی هزینه کمتری دارد

روش مینیمم ستون هم شبیه روش مینیمم سطر است

روش مینیمم سطر و ستون (ماتریس) و روش مجارستانی هم وجودارد

sedighias220@yahoo.com

روش ماتریس (مینیمم سطر و ستون)

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	19	30	50	10	7
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	70	20	18
تقاضا D	5	8	7	14	34 – 34

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	19	0	50	10	7
S_2	70	0	40	60	9
S_3	40	8	70	20	18-8
تقاضا D	5	8	7	14	34 – 34

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	0	0	0	7	7
S_2	70	0	40	60	9
S_3	40	8	70	20	10
تقاضا D	5	8	7	14	34 – 34

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	19	0	50	7	7
S_2	70	0	40	0	9
S_3	40	8	70	7	10
تقاضا D	5	8	7	14	34 – 34

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	19	0	0	7	7
S_2	70	0	7	0	9
S_3	40	8	0	7	18
تقاضا D	5	8	7	14	34 – 34

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضهS
S_1	0	0	0	7	7
S_2	2	0	7	0	9
S_3	3	8	0	7	18
تقاضاD	5	8	7	14	34 – 34

جدول فوق جواب نهایی است

Cost 7*10+2*70+7*40+3*40+8*8+7*20 = 814

sedighias220@yahoo.com

روش ووگل

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	19	30	50	10	7
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	70	20	18
تقاضا D	5	8	7	14	34 – 34

یک سطر بنام اختلاف بین کمترین هزینه آن سطر و یک هزینه بعدی آن محاسبه میکنیم

یک ستون بنام اختلاف بین کمترین هزینه آن ستون و یک هزینه بعدی آن محاسبه میکنیم

در این سطر و ستون اختلاف بزرگترین عدد اختلاف را مشخص کرده و در سطر یا ستون مرتبط به سلولی که کمترین مقدار را دارد تخصیص میدهیم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S	اختلاف
S_1	19	30	50	10	7	19-10=9
S_2	70	30	40	60	9	40-30=10
S_3	40	8	70	20	18	20-8=12
تقاضا D	5	8	7	14	34 – 34	
اختلاف	40-19=21	30-8=22	50-40=10	20-10=10		

در این سطر و ستون اختلاف بزرگترین عدد اختلاف 22 میباشد و در ستون D2 مرتبط به سلول کمترین هزینه S3D2 تخصیص 8 میدهیم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S	اختلاف
S_1	19	0	50	10	7	9
S_2	70	0	40	60	9	10
S_3	40	8	70	20	18-8=10	12
تقاضا D	5	8-8=0	7	14	34 – 34	
اختلاف	21*	22 *	10	10		

در سطر و ستون اختلاف بعدی بزرگترین عدد اختلاف 21 میباشد و در ستون D1 مرتبط به سلول کمترین هزینه S1D1 تخصیص 5 میدهیم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضهS	اختلاف
S_1	5	0	50	10	7-5=2	9
S_2	0	0	40	60	9	10
S_3	0	8	70	20	18-8=10	12
تقاضاD	5-5=0	8-8=0	7	14	34 – 34	
اختلاف	21**	22 *	10	10		

در سطر و ستون اختلاف بعدی بزرگترین عدد اختلاف 12 میباشد و در سطر S3 مرتبط به سلول کمترین هزینه S1D4 تخصیص 10 میدهیم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضهS	اختلاف
S_1	5	0	50	10	7-5=2	9
S_2	0	0	40	60	9	10
S_3	0	8	0	20-10=10	18-8-10=0	12***
تقاضاD	5-5=0	8-8=0	7	14-10=4	34 – 34	
اختلاف	21**	22 *	10	10		

در سطر و ستون اختلاف بعدی بزرگترین عدد اختلاف 10 میباشد و د[چند سطر و چند ستون این اختلاف موجود است آن مورد انتخاب میکنیم که کمترین هزینه باشد (یا آن مسیری انتخاب میکنیم که بیشترین تخصیص را بتوانیم بدهیم)

به سلول کمترین هزینه S1D4 تخصیص 10 میدهیم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضهS	اختلاف
S_1	5	0	50	2	7-5-2=0	9
S_2	0	0	40	60	9	10*
S_3	0	8	0	10	18-8-10=0	12***
تقاضاD	5-5=0	8-8=0	7	14-10-2=2	34 – 34	
اختلاف	21**	22 *	10*	10*#		

در سطر و ستون اختلاف بعدی بزرگترین عدد اختلاف 10 میباشد و در چند سطر و چند ستون این اختلاف موجود است آن مورد انتخاب میکنیم که کمترین هزینه باشد (یا آن مسیری انتخاب میکنیم که بیشترین تخصیص را بتوانیم بدهیم)

به سلول کمترین هزینه S1D4 تخصیص 10 میدهیم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضهS	اختلاف
S_1	5	0	0	2	7-5-2=0	9
S_2	0	0	7	60	9-7=2	10*#

S_3	0	8	0	10	18-8-10=0	12***
Dتقاضا	5-5=0	8-8=0	7-7=0	14-10-2=2	34 – 34	
اختلاف	21**	22 *	10*	10*#		

	D_1	D_2	D_3	D_4	Sعرضه	اختلاف
S_1	5	0	0	2	7-5-2=0	9
S_2	0	0	7	2	9-7-2=0	10*##
S_3	0	8	0	10	18-8-10=0	12***
Dتقاضا	5-5=0	8-8=0	7-7=0	14-10-2=2	34 – 34	
اختلاف	21**	22 *	10*	10*#		

Cost 5*19+2*10+7*40+2*60+8*8+10*20=779

sedighias220@yahoo.com

روش مجاری

اگر تمامی اعداد هر سطر یا ستون به یک میزان افزایش یا کاهش یابد جواب بهینه این جدول همان جواب بهینه جدول اولیه خواهد بود

مثال – چهار ماشین به چهار محل با هزینه حمل داخل جدول را تخصیص دهید

	D_1	D_2	D_3	D_4	⇩ میزان عرضه
S_1	9	7	6	8	1
S_2	5	4	2	7	1
S_3	3	5	1	9	1
S_4	5	10	3	4	1
⇨ میزان تقاضا	1	1	1	1	

کوچکترین عدد در هر سطز از سایر اعداد آن سطر کم میکنیم (بطوریکه در هر سطر یک صفر ظاهر شود)

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	9-6	7-6	6-6	8-6
S_2	5-2	4-2	2-2	7-2
S_3	3-1	5-1	1-1	9-1
S_4	5-3	10-3	3-3	4-3

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	3	1	0	2
S_2	3	2	0	5
S_3	2	4	0	8
S_4	2	7	0	1

در ستونی که حداقل یک صفر ندارد ، کوچکترین عدد در هر ستون از سایر اعداد آن ستون کم میکنیم

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	3-2	1-1	0	2-1
S_2	3-2	2-1	0	5-1
S_3	2-2	4-1	0	8-1
S_4	2-2	7-1	0	1-1

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	1	0	0	1
S_2	1	1	0	4
S_3	0	3	0	7
S_4	0	6	0	0

حداقل تعداد خطوط از صفرها عبور میدهیم اگر تعداد خطوط با تعداد عرضه یا تقاضا مساوی شود (4) . اعداد باقیمانده بهینه میشود

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	1	0	0	1
S_2	1	1	0	4
S_3	0	3	0	7
S_4	0	6	0	0

در جدول بالا تعداد خطوط 4 و تعداد عرضه یا تقاضا هم 4 میشود بنابراین جواب بهینه است

جواب بهینه انتخاب صفرها است– ابتدا صفرهایی که در سطر و ستون متناظر خود کمترین صفر داشته باشند انتخاب میکنیم

S1D2=7 S3D1=3 S4D4=4 S2D3=2

Cost= 7+3+4+2=16

اگر تعداد خطوط 4 نبود از بین اعدادی که خط نخورده اند کمترین عدد انتخاب و به اعداد در محل تقاطع اضافه میکنیم و از اعدادی که خط نخورده اند کسر میکنیم . خطوط را برداشته و مجددا در جدول حاصله حداقل خطوط رسم میکنیم و مثل قبل ادامه میدهیم

sedighias220@yahoo.com

مثال دیگر از روش مجاری

	1	2	3	4
A	24	10	21	11
B	14	22	10	15
C	15	17	20	19
D	11	19	14	13

24-10	10-10	21-10	11-10
14-10	22-10	10-10	15-10
15-15	17-15	20-15	19-15
11-11	19-11	14-11	13-11

14	0	11	1
4	12	0	5
0	2	5	4
0	8	3	2

14	0	11	1-1
4	12	0	5-1
0	2	5	4-1
0	8	3	2-1

روی صفر ها حداقل خط رسم میکنیم اگر تعداد خطوط برابر بعد شد (4) اعداد خط نخورده جواب بهینه میباشد

14	0	11	0
4	12	0	4
0	2	5	3
0	8	3	1

در جدول فوق سه خط رسم شده و از چهار کمتر است جواب بهینه نیست

از بین کل اعداد خط نخورده کمترین عدد را انتخاب میکنیم و از کلیه اعداد خط نخورده کسر و به اعداد تقاطع اضافه میکنیم

14+1	0	11	0
4+1	12	0	4
0	2-1	5-1	3-1
0	8-1	3-1	1-1

حالا در شکل زیر

15	0	11	0
5	12	0	4
0	1	4	2
0	7	2	0

در جدول بالا تعداد خطوط 4 و تعداد عرضه یا تقاضا هم 4 میشود بنابراین جواب بهینه است

جواب بهینه انتخاب صفرها است– ابتدا صفرهایی که در سطر و ستون متناظر خود کمترین صفر داشته باشند انتخاب میکنیم

A2=10 B3=10 C1=15 D4=13

Cost = 10+10+15+13 = 48

sedighias220@yahoo.com