

1) -نمرات دانشجویان با داده‌های زیر را اعلام شده است. الف) مد(نما) داده‌ها چه مقدار است. چرا ب) میانه داده‌ها چه مقدار است؟ ج- دهک هفتم داده‌های را معلوم کنید-د- میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید(4نمره)  
حل:

نمره = x	13	12	14	15	17
تعداد = f	3	1	2	2	2

x داده	12	13	14	15	17
f فراوانی	1	3	2	2	2
F فراوانی تجمعی	1	4	6	8	10

مد داده ای بمقدار 13 میباشد زیرا بیشترین تعداد را دارد  $M=13$

$$Q \sum f_i = \frac{1}{2}(1 + 3 + 2 + 2 + 2) = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow \text{در سطر } F_i \rightarrow 5+ \rightarrow F_i=6 \rightarrow m=14$$

یعنی نصف داده‌ها 14 یا کمتر از 14 هستند

$$Q \sum f_i = \frac{7}{10}(1 + 3 + 2 + 2 + 2) = \frac{70}{10} = 7 \rightarrow \text{در سطر } F_i \rightarrow 7+ \rightarrow F_i=8 \rightarrow 15$$

0.7 داده‌ها 15 یا کمتر از 15 هستند

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(12 * 1) + (13 * 3) + (14 * 2) + (15 * 2) + (17 * 2)}{1 + 3 + 2 + 2 + 2} = \frac{143}{10} = 14.3$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{(12 - 14.3)^2 * 1 + (13 - 14.3)^2 * 3 + (14 - 14.3)^2 * 2 + (15 - 14.3)^2 * 2 + (17 - 14.3)^2 * 2}{1 + 3 + 2 + 2 + 2} = 2.61 \text{ واریانس}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.61} = 1.62 \text{ انحراف معیار}$$

2) مصرف یک دارو در سه سال گذشته مقادیر زیر بوده در سال بعد پیش بینی نمایید(3نمره)

x = سال	1396	1397	1398	1400
y = مصرف	2	2	3	?

\*\*\* حل : ابتدا در جدول مقادیر X قدیمی را  $X_m$  نام گذاشته و آنرا را تغییر میدهیم مثلا همه را از 97 کم میکنیم

$X_m$ = سال	1396	1397	1398	1400
x	-1	0	+1	+3
y = مصرف	2	2	3	?

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i * \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1 * 2) + (0 * 2) + (1 * 3) - \frac{(-1 + 0 + 1)(2 + 2 + 3)}{3}}{((-1)^2 + (0)^2 + (1)^2) - \frac{(-1 + 0 + 1)^2}{3}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1 + 0 + 1}{3} = 0 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{2 + 2 + 3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad \frac{7}{3} = a + (0.5 * 0) \quad a = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{7}{3} + 0.5x$$

$$X_m = 1400 \rightarrow x = 1400 - 1397 = 3 \rightarrow y = \frac{7}{3} + (0.5 * 3) = 3.83$$

3) در ظرفی 5 توپ داریم ( 1 توپ سفید 2 توپ زرد 2 توپ قرمز ). الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ سفید و دو توپ زرد باشد چقدر است. ب) سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی سفید و دومی زرد و سومی هم زرد باشد چقدر است. ج) سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی سفید و دومی زرد و سومی هم زرد باشد چقدر است. (3نمره)

$$p = \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{2} \binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1 * 1 * 1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$p = \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{0} \binom{2}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{0}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{0}}{\binom{4}{1}} * \frac{\binom{0}{0} \binom{1}{1} \binom{2}{0}}{\binom{3}{1}} = \frac{1}{5} * \frac{2}{4} * \frac{1}{3} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$

$$p = \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{0} \binom{2}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{0}}{\binom{5}{1}} = \frac{1}{5} * \frac{2}{5} * \frac{2}{5} = \frac{4}{125}$$

4) کیت تشخیص کرونا در مورد 99٪ بیماران کرونایی جواب مثبت میدهد. آزمایش تشخیص کرونا در مورد 2٪ بیماران غیر کرونایی جواب مثبت میدهد. از بین بیماران یک بیمارستان که 3٪ آنها کرونایی هستند یک بیمار بتصادف انتخاب میکنیم. کیت آزمایش تشخیص کرونا در مورد این بیمار جواب مثبت میدهد احتمال اینکه بیمار واقعاً کرونایی باشد چقدر است (3نمره)

\*\*\* حل : مثبت را m و کرونایی را k و غیر کرونایی nk نام میگذاریم

$$P(k|m) = \frac{P(k) * P(m|k)}{P(k) * P(m|k) + P(nk) * P(m|nk)} = \frac{\frac{3}{100} * \frac{99}{100}}{\frac{3}{100} * \frac{99}{100} + \frac{297}{10000}} = \frac{297}{491} = 0.6049 = 60\%$$

بعضی دانشجویان بجای 491 در مخرج کسر - عدد 495 نوشته اند که غلط است و کسر نمره داشته اند

5) در یک کلاس 40 نفره با توزیع نرمال میانگین نمرات کلاس 16 واریانس 4 میباشد الف) احتمال اینکه نمره دانشجویی کمتر یا مساوی از 13 شود چقدر است ب) احتمال اینکه نمره دانشجویی دقیقاً 17 شود چقدر است؟ (برای جدول نرمال استاندارد چنین فرض کنید) (3نمره)  
 $p(z \leq 2) = 0.98, p(z \leq 1.5) = 0.93, p(z \leq 1) = 0.85, p(z \leq 0.5) = 0.7, p(z \leq 0) = 0.5$   
 $p(z \leq -2) = 0.02, p(z \leq -1.5) = 0.07, p(z \leq -1) = 0.15, p(z \leq -0.5) = 0.3$

$$\mu = 16 \rightarrow \sigma = 2$$

$$p(x \leq 13) = ? \rightarrow p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{13-16}{2}\right) = ? \rightarrow p(z \leq -1.5) = 0.07$$

$$p(x = 17) = ? \rightarrow p(x = 17) = p(x \leq 17) - p(x \leq 16) = p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{17-16}{2}\right) - p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{16-16}{2}\right) \rightarrow p(z \leq 0.5) - p(z \leq 0) = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

6) - در تابع زیر مقدار عدد K را طوری بدست آورید که این تابع چگالی بشود

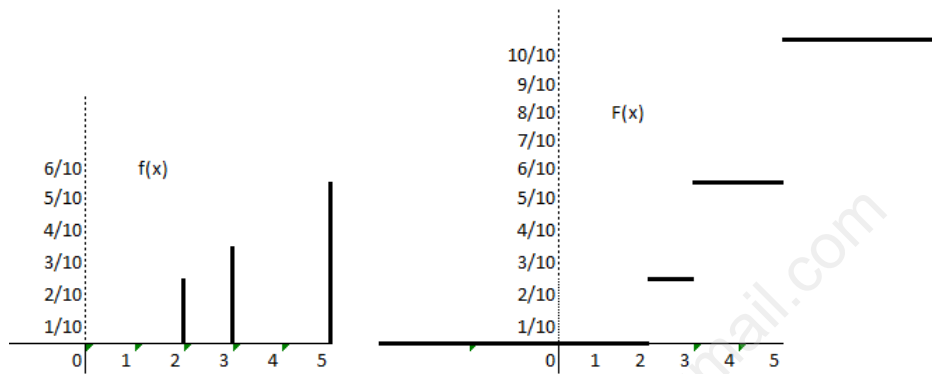
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k+2} & x = 2, 3, 5 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{cases}$$

سپس جدول تابع چگالی با این مقدار k بنویسید و صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید و در جدول زیر مقادیر تابع چگالی و توزیع را بنویسید نمودار  $f(x)$  و  $F(x)$  را رسم کنید و  $p(2 \leq x \leq 3)$  و امید ریاضی  $E(x)$  بدست آورید و همچنین امید  $E(2 \leq x \leq 3)$  را محاسبه کنید (4نمره)

$$\sum f(x) = 1 \rightarrow \frac{2}{k+2} + \frac{3}{k+2} + \frac{5}{k+2} = 1 \rightarrow \frac{10}{k+2} = 1 \rightarrow k+2 = 10 \rightarrow k = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & x = 2, 3, 5 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{cases}$$

x	2	3	5	
f(x)	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\sum f(x) = 1$ ok $0 \leq f(x) \leq 1$ ok
F(x)	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{10}{10} = 1$



$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$$

$$E(x) = \sum x * f(x) = \left(2 * \frac{2}{10}\right) + \left(3 * \frac{3}{10}\right) + \left(5 * \frac{5}{10}\right) = \frac{38}{10} = 3.8$$

$$E(2 \leq x \leq 3) = \sum x * f(x) = \left(2 * \frac{2}{10}\right) + \left(3 * \frac{3}{10}\right) = \frac{13}{10} = 1.3$$