

1) داده‌های زیر را داریم . الف) مد(نما) داده‌ها محاسبه کنید ب- میانه داده‌ها محاسبه کنید ج- چارک اول داده‌ها را محاسبه کنید د- میانگین و واریانس و انحراف معیار داده‌ها را محاسبه کنید رابطه جمع و تفریق میانگین با انحراف معیار و با دو برابر انحراف معیار محاسبه و تحلیل کنید(30نمره)

|           |       |       |       |      |
|-----------|-------|-------|-------|------|
| نمره = x  | 11-14 | 14-17 | 17-20 | 8-11 |
| تعداد = f | 2     | 5     | 2     | 1    |

حل

|           |      |       |       |       |
|-----------|------|-------|-------|-------|
| نمره = x  | 8-11 | 11-14 | 14-17 | 17-20 |
| تعداد = f | 1    | 2     | 5     | 2     |
| F         | 1    | 3     | 8     | 10    |
| xn        | 9.5  | 12.5  | 15.5  | 18.5  |

مد یا نما : همان داده ای است که بیشترین فراوانی (تعداد) را دارد که میشود 14-17 که بایستی دقیقاً مشخص کنیم چه عددی بین 14-17 میباشد

$$M = L_i + \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) * C = L_i + \left( \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right) * C = 14 + \frac{5 - 2}{(5 - 2) + (5 - 2)} * 3 = 15.5$$

میانه : میانه = وسط صف منظم داده که  $p=1/2$

$$Q * \sum f_i = \frac{1}{2} \sum f_i = \frac{1}{2} * (1 + 2 + 5 + 2) = 5$$

$$\rightarrow 5 + \rightarrow \frac{d}{F} \rightarrow F = 8 \rightarrow \frac{d}{X} \rightarrow x = 14 - 17$$

میانه عددی بین 14-17 است که برای تعیین دقیق آن

$$Q_{\frac{1}{2}} = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 14 + \frac{\frac{1}{2} * (1 + 2 + 5 + 2) - 3}{5} * 3 = 15.2$$

چارک اول

$$Q * \sum f_i = \frac{1}{4} \sum f_i = \frac{1}{4} * (1 + 2 + 5 + 2) = 2.5$$

$$\rightarrow 2.5 + \rightarrow \frac{d}{F} \rightarrow F = 3 \rightarrow \frac{d}{X} \rightarrow x = 11 - 14$$

چارک اول عددی بین 14-11 است که برای تعیین دقیق آن

$$Q_{\frac{8}{10}} = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 11 + \frac{\frac{1}{4} * (1 + 2 + 5 + 2) - 1}{2} * 3 = 13.25$$

|           |     |      |      |      |
|-----------|-----|------|------|------|
| نمره = x  | 9.5 | 12.5 | 15.5 | 18.5 |
| تعداد = f | 1   | 2    | 5    | 2    |

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(9.5 * 1) + (12.5 * 2) + (15.5 * 5) + (18.5 * 2)}{1 + 2 + 5 + 2} = \frac{149}{10} = 14.9$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{(9.5 - 14.9)^2 * 1 + (12.5 - 14.9)^2 * 2 + (15.5 - 14.9)^2 * 5 + (18.5 - 14.9)^2 * 2}{1 + 2 + 5 + 2} = 6.84 \quad \text{واریانس}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6.84} = 2.61 \quad \text{انحراف معیار}$$

$$\mu \pm 2\sigma \quad \mu \pm \sigma \quad \text{تحلیل}$$

$$\mu \pm \sigma = 14.9 \pm 2.61 = 12.29 \quad \text{تا} \quad 17.52$$

یعنی بیش از 68% داده ها بین 12.29 تا 17.52 میباشند

$$\mu \pm 2\sigma = 14.9 \pm (2 * 2.61) = 14.9 \pm 5.22 = 9.68 \quad \text{تا} \quad 20.12$$

یعنی بیش از 96% داده ها بین 9.68 تا 20.12 میباشند

2) در یک منطقه میزان مصرف برق در سالهای گذشته بشرح ذیل میباشد معادله خط رگرسیون را نوشته پیش بینی سالهای بعد چقدر میباشد (20نمره)

|   |      |      |      |      |      |
|---|------|------|------|------|------|
| X | 1397 | 1398 | 1399 | 1400 | 1401 |
| Y | 5    | 5    | 4    | ?    | ?    |

حل

سال مبنا را سال 1398 در نظر میگیریم و همه X ها را از 1398 کم میکنیم

|       |    |   |    |    |    |
|-------|----|---|----|----|----|
| X=سال | -1 | 0 | +1 | +2 | 3  |
| مصرف  | 5  | 5 | 4  | ?? | ?? |

میتوان پیش بینی کرد که عدد مصرف روند نزولی دارد پس باید کمتر از 3 شود

$$y = a + bx, \quad b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}, \quad \bar{y} = a + b\bar{x} \rightarrow a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1 * 5) + (0 * 5) + (1 * 4) - \frac{(-1 + 0 + 1) * (5 + 5 + 4)}{3}}{(-1)^2 + 0^2 + (1)^2 - \frac{(-1 + 0 + 1)^2}{3}}$$

$$b = \frac{-5 + 0 + 4 - \frac{0 * 14}{3}}{1 + 0 + 1 - \frac{0}{3}} \quad b = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1 + 0 + 1}{3} \quad \bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{5 + 5 + 4}{3} \quad \bar{y} = \frac{14}{3} = 4.66$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \rightarrow a = \bar{y} - b\bar{x} \rightarrow a = 4.66 + 0.5 * 0 \rightarrow a = 4.66 \rightarrow y = a + bx \rightarrow$$

$$y = 4.66 - 0.5x$$

$$13400 - 1398 = 2 \rightarrow y = 4.66 - 0.5x \rightarrow y = 4.66 - (0.5 * 2) = 4.66 - 1 = 3.66$$

پس برای سال 1400 پیش بینی به مقدار 3.66 میشود

$$1401 - 1398 = 3 \rightarrow y = 4.66 - 0.5x \rightarrow y = 4.66 - (0.5 * 3) = 4.66 - 1.5 = 3.16$$

پس برای سال 1401 پیش بینی به مقدار 3.16 میشود

3) شرکتی 5 کامپیوتر دارد که 2 عدد آن خراب است از این شرکت بصورت اتفاقی 2 کامپیوتر خرید میکنیم کلیه حالات و احتمالات خرابی در جدولی شامل X تعداد خرابی و توابع  $f(x)$  و  $F(x)$  را نوشته و نمودار این دو تابع را رسم کنید (20)

حل: M = معیوب S = سالم

احتمال 2 سالم و صفر معیوب

$$P_{2S \ 0M} = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!(3-2)!} * 1}{\frac{5!}{2!(5-2)!}} = \frac{3}{\frac{3! * 4 * 5}{2! * 3!}} = \frac{3}{10}$$

احتمال 1 سالم و 1 معیوب

$$P_{1S \ 1M} = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 * 2}{\frac{5!}{2!(5-2)!}} = \frac{6}{10}$$

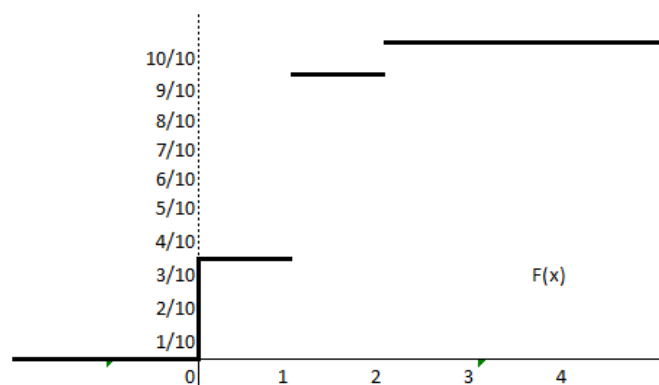
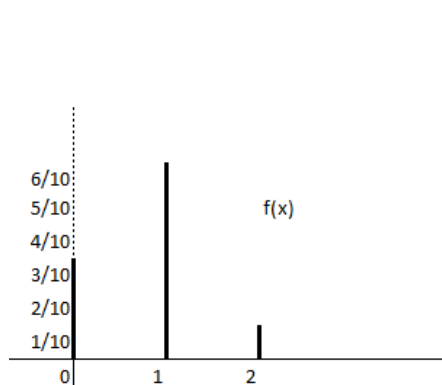
احتمال 0 سالم و 2 معیوب

$$P_{0S \ 2M} = \frac{\binom{3}{0} \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1 * 1}{\frac{5!}{2!(5-2)!}} = \frac{1}{10}$$

| تعداد معیوب X=                           |   | 0              | 1              | 2               |
|--|---|----------------|----------------|-----------------|
| چگالی احتمال $P(X=x) = f(x)$ تابع احتمال |   | $\frac{3}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{10}$  |
| F(x)                                     | 0 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{10}{10}$ |

بایستی هر  $f(x)$  بین صفر و یک باشد که طبق جدول بالا چنین هم هست و باید جمع کل احتمالات یک بشود که همینطور هم هست

$$\frac{3}{10} + \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$



4) دانشگاه زند کل کامپیوترهای مورد نیازش را از سه شرکت 40٪ از شرکت A و 30٪ از شرکت B و بقیه از شرکت C تامین میکند - میزان کامپیوترهای معیوب در سه شرکت - 1٪ شرکت A - 2٪ شرکت B - 3٪ شرکت C معیوب میباشد. یک کامپیوتر از انبار دانشگاه برمیداریم. الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟ ج) اگر این کامپیوتر خراب باشد احتمال اینکه از شرکت C باشد چقدر است؟ (10 نمره)

|   | در صد تامین نیاز   | در صد معیوب |
|---|--------------------|-------------|
| A | 40%                | 1%          |
| B | 30%                | 2%          |
| C | 100%-(40%+30%)=30% | 3%          |

M = معیوب

$$p(M) = p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) + p(C) * p(M|C)$$

$$p(M) = \left(\frac{40}{100} * \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} * \frac{3}{100}\right) = \frac{190}{10000} = 0.019$$

$$1 - p(M) = 1 - 0.019 = 0.981$$

$$p(B|M) = \frac{p(B) * p(M|B)}{p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) + p(C) * p(M|C)}$$

$$p(B|M) = \frac{\frac{30}{100} * \frac{2}{100}}{\left(\frac{40}{100} * \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} * \frac{3}{100}\right)} = \frac{60}{190} = \frac{6}{19}$$

5) در ظرفی 7 توپ داریم ( 1 توپ سفید 4 توپ سیاه 2 توپ قرمز ) . الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ سیاه باشد چقدر است. ب) سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. ج) سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. (10 نمره)

الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ تا سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{4}{2} \binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1 * \frac{4!}{2!(4-2)! * 2!}}{\frac{7!}{3!(7-3)!}} = \frac{12}{35}$$

ب) سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{4}{0} \binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{4}{1} \binom{1}{0}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{3}{1} \binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} = \frac{2}{7} * \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

ج) سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{1}{0} \binom{4}{0} \binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{4}{1} \binom{2}{0}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{4}{1} \binom{2}{0}}{\binom{7}{1}} = \frac{2}{7} * \frac{4}{7} * \frac{4}{7} = \frac{32}{343}$$

6) در یک آزمایشگاه دو دستگاه مختلف برای تست کرونا وجود دارد که برای هر بیمار در دو دستگاه آزمایش انجام میشود احتمال خطا در دستگاه اول 0.02 و احتمال خطا در دستگاه دوم 0.01 و احتمال اینکه هر دو دستگاه باهم خطا کنند 0.005 است و احتمال اینکه رئیس آزمایشگاه غایب شود 0.01 است. الف) احتمال خطا در دستگاه اول یا دوم چقدر است؟ ب) احتمال اینکه اصلاً خطا رخ ندهد چقدر است؟ ج) احتمال اینکه دستگاه دوم خطا یا رئیس غایب شود چقدر است؟ د) احتمال اینکه دستگاه دوم خطا و رئیس غایب شود چقدر است؟ (10 نمره) حل:

E=دستگاه اول                      F=دستگاه دوم                      B=غیبت رئیس

الف) احتمال اینکه دستگاه اول یا دستگاه دوم خطا کند

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.02 + 0.01 - 0.005 = 0.025$$

ب) احتمال اینکه خطا صورت نگیرد عبارتست از

$$1 - P(E \cup F) = 1 - 0.025 = 0.975$$

ج) دستگاه دوم و غیبت رئیس دو پیشامد مستقل هستند احتمال دستگاه دوم یا غیبت رئیس رخ دهد

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) = 0.01 + 0.01 = 0.02$$

د) احتمال دستگاه دوم خطا و رئیس غایب شود بهم ربطی ندارد مستقل هستند

$$P(F \cap B) = P(F) * P(B) = 0.01 * 0.01 = \frac{1}{100} * \frac{1}{100} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$