

1) حقوق ده نفر بشرح زیر است داده‌ها را در جدولی مرتب کنید. الف) مد(نما) داده‌ها چه مقدار است (چرا) ب). میانه داده‌ها چه مقدار است؟ - ج) صدک 90 داده‌های را معلوم کنید - د) میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید. ه) با تکمیل جدول، فراوانی نسبی و فراوانی نسبی تجمعی را محاسبه کنید و با یک مثال نسبی‌ها را توضیح دهید. و) یکبار میانگین با انحراف معیار جمع و تفریق کنید و یکبار میانگین با دو برابر انحراف معیار جمع و تفریق کنید و هر دو را تحلیل کنید. ز) فرمول واریانس بدون توان 2 آن بنویسید و حاصل را بدست آورید نمرات: 5 و 4 و 2 و 3 و 5 و 2 و 4 و 1 و 4 (30 نمره)

حل:

x داده	1	2	3	4	5
f فراوانی	1	2	1	4	2
F فراوانی تجمعی	1	3	4	8	10
r = $\frac{f_i}{\sum f_i}$ فراوانی نسبی	1/10=10%	2/10=20%	1/10=10%	4/10=40%	2/10=20%
R = $\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$ فراوانی نسبی تجمعی	1/0=10%	3/10=30%	4/10=40%	8/10=80%	10/10=100%

مد داده ای بمقدار 4 میباشد زیرا بیشترین تعداد را دارد

$$M=4$$

میانه داده‌ها

$$Q \sum f_i = \frac{1}{2}(1 + 2 + 1 + 4 + 2) = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow \text{در سطر } F_i \rightarrow 5+ \rightarrow F_i=8 \rightarrow m=4$$

یعنی نصف داده‌ها 4 یا کمتر از 4 هستند

صدک 90

$$Q \sum f_i = \frac{90}{100}(1 + 2 + 1 + 4 + 2) = \frac{900}{100} = 9 \rightarrow \text{در سطر } F_i \rightarrow 9+ \rightarrow F_i=10 \rightarrow 5$$

90٪ داده‌ها 5 یا کمتر از 5 هستند

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(1 * 1) + (2 * 2) + (3 * 1) + (4 * 4) + (5 * 2)}{1 + 2 + 1 + 4 + 2} = \frac{34}{10} = 3.4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{(1 - 3.4)^2 * 1 + (2 - 3.4)^2 * 2 + (3 - 3.4)^2 * 1 + (4 - 3.4)^2 * 4 + (5 - 3.4)^2 * 2}{1 + 2 + 1 + 4 + 2} = 1.64 = \text{واریانس}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.64} = 1.28 \text{ انحراف معیار}$$

$$\mu \pm \sigma \quad \mu \pm 2\sigma$$

$$\mu \pm \sigma = 3.4 \pm 1.28 = 2.12 \text{ تا } 4.68$$

یعنی بیش از 68٪ داده‌ها بین 2.12 تا 4.68 میباشد

$$\mu \pm 2\sigma = 3.4 \pm (2 * 1.28) = 3.4 \pm 2.56 = 0.84 \text{ تا } 5.96$$

یعنی بیش از 96٪ داده‌ها بین 0.84 تا 5.96 میباشد

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x}) * f_i}{\sum f_i} = \frac{(1 - 3.4) * 1 + (2 - 3.4) * 2 + (3 - 3.4) * 1 + (4 - 3.4) * 4 + (5 - 3.4) * 2}{1 + 2 + 1 + 4 + 2} = \frac{0}{10} = 0$$

جدول در بالا تکمیل شد

نسبی r یعنی اینکه مثلا از داده به مقدار 3 بتعداد 1 تا داریم یعنی 10٪ داده‌ها 3 هستند

نسبی تجمعی R یعنی اینکه مثلا از داده به مقدار 3 و کمتر از 3 بتعداد 4 تا داریم یعنی 40٪ داده‌ها 3 یا کمتر از 3 هستند

2) داده‌های زیر اعلام شده است. الف) مد(نما) داده‌ها چه مقدار است. چرا ب) میانه داده‌ها چه مقدار است؟ ج- دهک دوم داده‌های را معلوم کنید-د- میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید (20 نمره)

نمره = x	13	12	14	17
تعداد = f	3	1	1	1

نمره = x	12	13	14	17
تعداد = f	1	3	1	1
F	1	4	5	6

مد یا نما : همان داده‌ای است که بیشترین فراوانی (تعداد) را دارد که میشود 13
میانه : میانه = وسط صف منظم داده که $p=1/2$

$$Q * \sum f_i = \frac{1}{2} \sum f_i = \frac{1}{2} * (1 + 3 + 1 + 1) = 3$$

$$\rightarrow 3 + \rightarrow \frac{3}{F} \rightarrow F = 4 \rightarrow \frac{3}{X} \rightarrow x = 13$$

میانه عدد 13 است

دهک دوم

$$Q * \sum f_i = \frac{2}{10} \sum f_i = \frac{2}{10} * (1 + 3 + 1 + 1) = 1.2$$

$$\rightarrow 1.2 + \rightarrow \frac{1.2}{F} \rightarrow F = 4 \rightarrow \frac{1.2}{X} \rightarrow x = 13$$

دهک دوم 13 میباشد یعنی دو دهم داده‌ها 13 یا کمتر از 13 میباشد

میانگین

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(12 * 1) + (13 * 3) + (14 * 1) + (17 * 1)}{1 + 3 + 1 + 1} = \frac{82}{6} = 13.66$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{(12 - 13.66)^2 * 1 + (13 - 13.66)^2 * 3 + (14 - 13.66)^2 * 1 + (17 - 13.66)^2 * 1}{1 + 3 + 1 + 1} = 2.55 \text{ واریانس}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.55} = 1.59 = 1.60 \text{ انحراف معیار}$$

3) در یک منطقه میزان مبتلایان به ازدیاد قندخون در چند سال گذشته بشرح ذیل میباشد معادله خط رگرسیون را نوشته پیش بینی سال 1399 و 1400 و چقدر میباشد (20 نمره)

سال=x	1396	1397	1398	1399	1400
مصرف	4	3	3	??	??

سال مبنا را سال 1397 در نظر میگیریم و همه X ها را از 1397 کم میکنیم

سال=x	-1	0	+1	+2	3
مصرف	4	3	3	??	??

میتوان پیش بینی کرد که عدد مصرف روند نزولی دارد پس باید کمتر از 3 شود

$$y = a + bx, \quad b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}, \quad \bar{y} = a + b\bar{x} \rightarrow a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1 * 4) + (0 * 3) + (1 * 3) - \frac{(-1 + 0 + 1) * (4 + 3 + 3)}{3}}{(-1)^2 + 0^2 + (1)^2 - \frac{(-1 + 0 + 1)^2}{3}}$$

$$b = \frac{-4 + 0 + 3 - \frac{0 * 10}{3}}{1 + 0 + 1 - \frac{0}{3}} \quad b = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1 + 0 + 1}{3} \quad \bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4 + 3 + 3}{3} \quad \bar{y} = \frac{10}{3} = 3.33$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \rightarrow a = \bar{y} - b\bar{x} \rightarrow a = 3.33 + 0.5 * 0 \rightarrow a = 3.33 \rightarrow y = a + bx \rightarrow$$

$$y = 3.33 - 0.5x$$

$$1399 - 1397 = 2 \rightarrow y = 3.33 - 0.5x \rightarrow y = 3.33 - (0.5 * 2) = 3.33 - 1 = 2.33$$

پس برای سال 99 پیش بینی به مقدار 2.33 میشود

$$1400 - 1397 = 3 \rightarrow y = 3.33 - 0.5x \rightarrow y = 3.33 - (0.5 * 3) = 3.33 - 1.5 = 1.83$$

پس برای سال 1400 پیش بینی به مقدار 1.83 میشود

4) یک سکه را دو بار پرتاب میکنیم برای هر حالت رو آمدن (شیر) جدول تابع چگالی احتمال و توزیع $f(x)$ و $F(x)$ را بنویسید و نمودار $f(x)$ و $F(x)$ را رسم کنید (10 نمره)

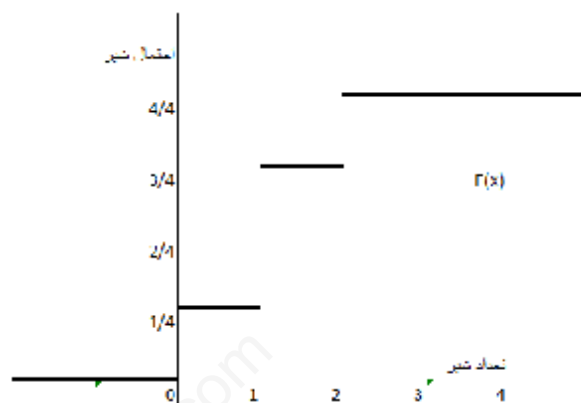
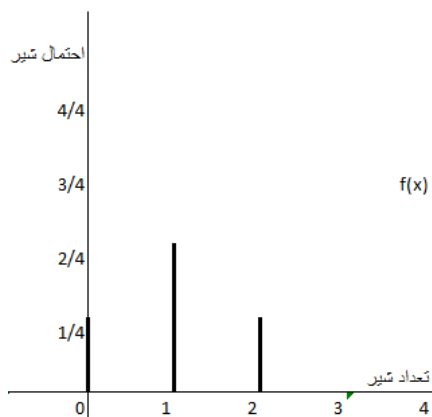
حل: اگر شیر = H و خط = T بنامیم

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

تعداد کل حالات چهار تا است و احتمال هر حالت یکی از چهار تا است

تعداد شیر	X	0	1	2	
چگالی احتمال	$f(x)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$	$0 \leq f(x) \leq 1$ $\sum f(x) = 1$
چگالی توزیع	F(x)	$1/4$	$3/4$	$(4/4)=1$	

منحنی هر دو تابع ...



5) دانشگاه زند کل کامپیوترهای مورد نیازش را از دو شرکت A و B تامین میکند - میزان کامپیوترهای معیوب در دو شرکت - 2٪ شرکت A - 4٪ شرکت B معیوب میباشد. یک کامپیوتر از انبار دانشگاه برمیداریم. الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟ ج) اگر این کامپیوتر خراب باشد احتمال اینکه از شرکت B باشد چقدر است؟ (10 نمره)

	در صد تامین نیاز	در صد معیوب
A	40%	2%
B	100%-40%=60%	4%

M = معیوب

$$p(M) = p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B)$$

$$p(M) = \left(\frac{40}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{60}{100} * \frac{4}{100}\right) = \frac{320}{10000} = 0.032$$

$$1 - p(M) = 1 - 0.032 = 0.968$$

$$p(B|M) = \frac{p(B) * p(M|B)}{p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B)}$$

$$p(B|M) = \frac{\frac{60}{100} * \frac{4}{100}}{\left(\frac{40}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{60}{100} * \frac{4}{100}\right)} = \frac{\frac{240}{10000}}{\frac{320}{10000}} = \frac{240}{320} = \frac{24}{32} = 0.75$$

6) احتمال پنچر شدن لاستیک جلو یک موتورسیکلت 0.06 و احتمال پنچر شدن لاستیک عقب 0.03 و احتمال اینکه هر دو لاستیک باهم پنچر شود 0.02 و احتمال اینکه بنزین در باک تمام شود 0.01 است. الف) احتمال پنچر شدن لاستیک جلو یا عقب چقدر است؟ ب) احتمال اینکه اصلاً پنچر نشود چقدر است؟ ج) احتمال اینکه لاستیک عقب پنچر یا بنزین تمام شود چقدر است؟ د) احتمال اینکه لاستیک عقب پنچر و بنزین تمام شود چقدر است؟ (10 نمره)

E=لاستیک جلو F=لاستیک عقب B=بنزین

الف) احتمال اینکه لاستیک جلو یا لاستیک عقب پنچر کند

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.06 + 0.03 - 0.02 = 0.07$$

ب) احتمال اینکه پنچر نشود عبارتست از

$$1 - P(E \cup F) = 1 - 0.07 = 0.93$$

ج) لاستیک عقب و بنزین دو پیشامد مستقل هستند احتمال لاستیک عقب یا تمام بنزین رخ دهد

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) = 0.03 + 0.01 = 0.04$$

د) احتمال لاستیک عقب پنچر و بنزین تمام شود بهم ربطی ندارد مستقل هستند

$$P(F \cap B) = P(F) * P(B) = 0.03 * 0.01 = \frac{3}{100} * \frac{1}{100} = \frac{3}{10000} = 0.0003$$