

اگر در حل زیر جایی غلط دیدید صحیح آنرا بنویسید

1) نمرات دانشجویان با داده‌های زیر را اعلام شده است. الف) مد (نما) داده‌ها چه مقدار است. چرا ب) میانه داده‌ها چه مقدار است؟ -ج- صدک 0.85 داده‌های را معلوم کنید-د- میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید

| | | | | | | |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| نمره = x | 8-10 | 12-14 | 18-20 | 10-12 | 16-18 | 14-16 |
| تعداد = f | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 |

*** حل: ابتدا جدول را مرتب نموده و فراوانی تجمعی را بدست میاوریم و داده قدیم X_m نام میگذاریم و داده جدید X را که میانگین کران بالا و پایین هر طبقه است بدست میاوریم

| | | | | | | |
|--------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| نمره = X_m | 8-10 | 10-12 | 12-14 | 14-16 | 16-18 | 18-20 |
| تعداد = f | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| F | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 |
| نمره = x | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

**** مد یا نما: همان داده ای است که بیشترین فراوانی (تعداد) را دارد که میشود 12-14 که بایستی دقیقاً مشخص کنیم چه عددی بین 12-14 میباشد

$$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) * C = L_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right) * C = 12 + \frac{3 - 1}{(3 - 1) + (3 - 2)} * 2 = 13.33$$

**** میانه: میانه = وسط صف منظم داده که $p=1/2$

$$Q * \sum f_i = \frac{1}{2} * (1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1) = 5$$

$$\rightarrow 5 + \rightarrow \frac{d}{F} \rightarrow F = 7 \rightarrow \frac{d}{X} \rightarrow x = 14 - 16$$

میانه عددی بین 14-16 است که برای تعیین دقیق آن

$$m = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 14 + \frac{\frac{1}{2} * (1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1) - 5}{2} * 2 =$$

$$m = 14 + \left(\frac{5-5}{2} \right) * 2 = 14 \quad \text{یعنی نصف یا 50 درصد داده ها 14 یا کمتر از 14 هستند}$$

**** صدک 85

$$Q * \left(\sum f_i \right) = \frac{85}{100} * (1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1) = 8.5$$

$$\rightarrow 8.5 + \rightarrow \frac{d}{F} \rightarrow F = 9 \rightarrow \frac{d}{X} \rightarrow x = 16 - 18$$

برای محاسبه دقیق صدک 85

$$Q = L_i + \frac{Q * \sum f_i - F_{i-1}}{f_i} * C = 16 + \frac{\frac{85}{100} * (1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1) - 7}{2} * 2 =$$

$$Q = 16 + \frac{8.5 - 7}{2} * 2 = 17.5 \quad \text{یعنی 85 درصد داده ها 17.5 یا کمتر از 17.5 هستند}$$

**** میانگین با \bar{X}_n

$$\bar{x} = \frac{\sum (x_i * f_i)}{\sum f_i} = \frac{(9 * 1) + (11 * 1) + (13 * 3) + (15 * 2) + (17 * 2) + (19 * 1)}{1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1} = \frac{142}{10} = 14.2$$

**** واریانس

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{(9 - 14.2)^2 * 1 + (11 - 14.2)^2 * 1 + (13 - 14.2)^2 * 3 + (15 - 14.2)^2 * 2 + (17 - 14.2)^2 * 2 + (19 - 14.2)^2 * 1}{1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1}$$

$$\sigma^2 = 8.16$$

**** انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{8.16} = 2.86$$

2) میانگین فشار خون افراد مبتلابه یک جامعه در سه سال گذشته مقادیر زیر بوده در سال 99 پیش بینی نمایید

| | | | | |
|----------|----|----|----|----|
| سال = x | 95 | 96 | 97 | 99 |
| مصرف = y | 12 | 14 | 15 | ؟ |

*** حل : ابتدا در جدول مقادیر X قدیمی را Xm نام گذاشته و آنرا را تغییر میدهیم مثلا همه را از 96 کم میکنیم

| | | | |
|----------|----|----|----|
| سال = Xm | 95 | 96 | 97 |
| x | -1 | 0 | +1 |
| مصرف = y | 12 | 14 | 15 |

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1 * 12) + (0 * 14) + (1 * 15) - \frac{(-1+0+1)(12+14+15)}{3}}{((-1)^2 + (0)^2 + (1)^2) - \frac{(-1+0+1)^2}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1 + 0 + 1}{3} = 0 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{12 + 14 + 15}{3} = \frac{41}{3}$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad \frac{41}{3} = a + (1.5 * 0) \quad a = \frac{41}{3}$$

$$y = \frac{41}{3} + 1.5x$$

$$Xm = 99 \rightarrow x = 99 - 96 = 3 \rightarrow y = \frac{41}{3} + (1.5 * 3) = 18.1$$

3) در ظرفی 6 توپ داریم (1 توپ سفید 2 توپ سیاه 3 توپ قرمز) . الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ سیاه باشد چقدر است. ب) سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. ج) سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است.

*** حل :

$$p = \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{2} \binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1 * 1 * 3}{20} = \frac{3}{20}$$

$$p = \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{0} \binom{3}{1}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{1}{1} \binom{1}{0}}{\binom{4}{1}} = \frac{3}{6} * \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

$$p = \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{0} \binom{3}{1}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{3}{0}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0} \binom{2}{1} \binom{3}{0}}{\binom{6}{1}} = \frac{3}{6} * \frac{2}{6} * \frac{2}{6} = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

4) دانشگاه زند کل کامپیوترهای مورد نیازش را از سه شرکت A و B و C میبشد. یک کامپیوتر از انبار دانشگاه بر میداریم. الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟ ج) اگر این کامپیوتر خراب باشد احتمال اینکه از شرکت C باشد چقدر است؟

*** حل: عیب را K نام میگذاریم

$$P(K) = P(A) * P(K|A) + P(B) * P(K|B) + P(C) * P(K|C) = \left(\frac{40}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{50}{100} * \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{10}{100} * \frac{5}{100}\right) = \frac{180}{10000} = \frac{18}{1000}$$

احتمال معیوب بودن هجده هزارم یا یک و هشت دهم درصد

احتمال سالم بودن نهصد و هشتاد و دو هزارم یا نود و هشت و دو دهم درصد $1 - \frac{18}{1000} = 1 - 0.018 = 0.982$
 احتمال سالم بودن + احتمال معیوب بودن = 1
 احتمال سالم بودن = 1 - احتمال معیوب بودن = 1 - 0.018 = 0.982

$$P(C|K) = \frac{P(C) * P(K|C)}{P(A) * P(K|A) + P(B) * P(K|B) + P(C) * P(K|C)} = \frac{\frac{10}{100} * \frac{5}{100}}{\left(\frac{40}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{50}{100} * \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{10}{100} * \frac{5}{100}\right) = \frac{50}{180} = \frac{5}{18} = 0.27$$

5) احتمال پنجر شدن لاستیک سمت راست یک خودرو 0.11 و احتمال پنجر شدن لاستیک سمت چپ 0.13 و احتمال اینکه هر دو لاستیک باهم پنجر شود 0.02 و احتمال اینکه بنزین در باک تمام شود 0.01 است. الف) احتمال پنجر شدن لاستیک راست یا چپ چقدر است؟ ب) احتمال اینکه اصلا پنجر نشود چقدر است؟ ج) احتمال اینکه لاستیک چپ پنجر یا بنزین تمام شود چقدر است؟ د) احتمال اینکه لاستیک چپ پنجر و بنزین تمام شود چقدر است؟

الف) احتمال پنجر شدن لاستیک راست یا چپ چقدر است؟ = احتمال پنجری

$$P(R \cup L) = P(R) + P(L) - P(R \cap L) = 0.11 + 0.13 - 0.02 = 0.22$$

ب) احتمال اینکه اصلا پنجر نشود چقدر است؟ = احتمال سالمی

احتمال پنجری = 1 - احتمال سالم + احتمال پنجری

$$1 - 0.22 = 0.78$$

د) احتمال اینکه لاستیک چپ پنجر و بنزین تمام شود چقدر است؟ چون مستقل از هم هستند

$$P(L \cap B) = P(L) * P(B) = 0.13 * 0.01 = \frac{13}{100} * \frac{1}{100} = \frac{13}{10000} = 0.0013$$

ج) احتمال اینکه لاستیک چپ پنجر یا بنزین تمام شود چقدر است؟

$$P(L \cup B) = P(L) + P(B) - P(L \cap B) = 0.13 + 0.01 - 0.0013 = 0.1387 \approx 0.14$$

(6) - در تابع چگالی احتمال زیر الف) مقدار K را بدست آورید

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2k-4} & x = -1, 3, 5 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{cases}$$

ب) جدول مقادیر تابع چگالی و توزیع را با این مقدار K بنویسید (صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید)
 ه) $p(x > 4)$ و $p(-1 \leq x \leq 3)$ بدست آورید (و نمودار تابع چگالی و تابع توزیع رسم کنید
 و امید ریاضی $E(x)$ واریانس و انحراف معیار $\sigma^2(x)$ و $\sigma(x)$ را محاسبه کنید

| | | | |
|-------------|--|--|--|
| x | | | |
| f(x) | | | |
| F(x) | | | |

*** حل

$$\sum f(x) = 1 \rightarrow \frac{-1+1}{2k-4} + \frac{3+1}{2k-4} + \frac{5+1}{2k-4} = 1 \rightarrow \frac{0+4+6}{2K-4} = 1 \rightarrow 2k-4 = 10 \rightarrow$$

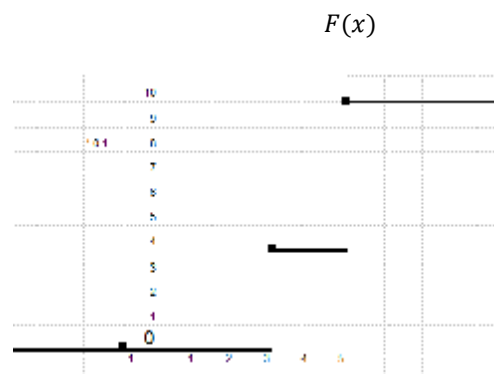
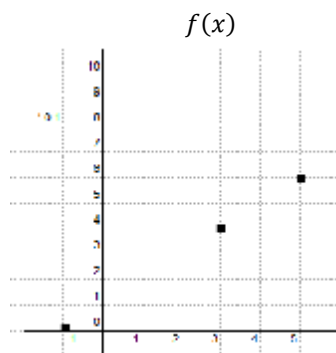
$$2k = 14 \rightarrow K = \frac{14}{2} \rightarrow K = 7$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{10} & x = -1, 3, 5 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{cases}$$

| | | | | |
|------|----------------|----------------|---------------------|---|
| x | -1 | 3 | 5 | |
| f(x) | $\frac{0}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\sum f(x) = 1$ ok $0 \leq f(x) \leq 1$ ok |
| F(x) | 0 | $\frac{4}{10}$ | $\frac{10}{10} = 1$ | |

$$P(X > 4) = P(X = 5) = \frac{6}{10}$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 3) = \frac{4}{10}$$



$$E(x) = \sum x * f(x) = \left(-1 * \frac{0}{10}\right) + \left(3 * \frac{4}{10}\right) + \left(5 * \frac{6}{10}\right) = \frac{42}{10}$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \sum x^2 * f(x) = \left((-1)^2 * \frac{0}{10}\right) + \left(3^2 * \frac{4}{10}\right) + \left(5^2 * \frac{6}{10}\right) = \frac{186}{10}$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{186}{10} - \left(\frac{42}{10}\right)^2 = \frac{96}{100} \quad \sigma(x) = \sqrt{96/100}$$