نمونه سوالات آمار و احتمال و جواب آنها

++++++++++++++++++++++++++++

آمار گسسته

1) –نمرات دانشجویان با داده‌های زیر را در جدولی دیگر مرتب کنید. الف) میانه داده ها چه مقدار است؟ (چرا) ب- مد(نما) داده ها چه مقدار است. -ج- صدک 85 داده‌های را معلوم کنید –د- میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید

x = نمره	15	12	20	11	17	14
f= تعداد	2	4	1	1	1	1

حل : مد داده 14 میباشد زیرا بیشترین تکرار(تعداد) را دارد

برای میانه و چندک حتما باید مرتب کنیم و Fi تشکیل دهیم

x = نمره	11	12	14	15	17	20
f= تعداد	1	4	1	2	1	1
Fi	1	5	6	8	9	10

در میانه p=1/2 است

$n * p = 10 * \frac{1}{2} = 5 \quad 5+ \rightarrow Fi = 6 \rightarrow Xi = 14$ میانه

در صدک 85 خواهیم داشت p=85/100

$n * p = 10 * \frac{85}{100} = 8.5 \quad 8.5+ \rightarrow Fi = 9 \rightarrow Xi = 17$

یعنی 85 درصد داده ها 17 یا کمتر از 17 میباشند

$\breve{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{(11*1)+(12*4)+(14*1)+(15*2)+(17*1)+(20*1)}{1+4+1+2+1+1}$=14 میانگین

$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \breve{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{(11-14))^2*1+(12-14))^2*4+(14-14))^2*1+(15-14))^2*2+(17-14))^2*1+(20-14))^2*1}{1+4+1+2+1+1}$=7.2 واریانس

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{7.2} = 2.68$ انحراف معیار

✲✲آمار پیوسته

2) –نمرات دانشـجویان با دادەهای زیر را اعلام شـده اسـت. الف) میانه داده ها چه مقدار اسـت؟ب- مد(نما) داده ها چه مقدار اسـت. چرا-ج- صـدک 15 دادەهای را معلوم کنید–د- میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید

نمره = x	8-10	12-14	18-20	10-12	16-18	14-16
تعداد =f	1	2	1	1	1	4

حل : ابتدا جدول را مرتب نموده و فراوانی تجمعی را بدســت میاوریم و داده قدیم Xm نام میگذاریم و داده جدید x را که میانگین کران بالا و پایین هر طبقه است بدست میاوریم

نمره = Xm	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
تعداد =f	1	1	2	4	1	1
F	1	2	4	8	9	10
نمره = x	9	11	13	15	17	19

مد یا نما : همان داده ای اسـت که بیشــترین فراوانی(تعداد) را دارد که میشـود 14-16 که بایسـتی دقیقا مشـخص کنیم چه عددی بین 14-16 میباشد

$$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) * C = L_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}\right) * C = 14 + \frac{4 - 2}{(4 - 2) + (4 - 1)} * 2 = 14.8$$

میانه : میانه = وسط صف منظم داده که p=1/2

$$n * p = \left(\sum f_i\right) * p = (1 + 1 + 2 + 4 + 1 + 1) * \left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

$$\rightarrow 5+ \rightarrow \frac{\text{در}}{F} \rightarrow \quad F = 8 \quad \rightarrow \frac{\text{در}}{X} \quad \rightarrow \quad x = 14 - 16$$

میانه عددی بین 14-16 است که برای تعیین دقیق آن

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C \qquad m = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C = 14 + \frac{(1 + 1 + 2 + 4 + 1 + 1) * \left(\frac{1}{2}\right) - 4}{4} * 2 =$$

$$m = 14 + \left(\frac{5 - 4}{4}\right) * 2 = 14.5$$

صدک 15

$$n * p = \left(\sum f_i\right) * p = (1 + 1 + 2 + 4 + 1 + 1) * \left(\frac{15}{100}\right) = 1.5$$

$$\rightarrow 1.5+ \rightarrow \frac{\text{در}}{F} \rightarrow \quad F = 2 \quad \rightarrow \frac{\text{در}}{X} \quad \rightarrow \quad x = 10 - 12$$

برای محاسبه دقیق صدک 15

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C \qquad Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C = 10 + \frac{(1 + 1 + 2 + 4 + 1 + 1) * \left(\frac{15}{100}\right) - 1}{1} * 2 =$$

$$Q = 10 + \frac{1.5 - 1}{1} * 2 = 11$$

میانگین با Xn

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(9 * 1) + (11 * 1) + (13 * 2) + (15 * 4) + (17 * 1) + (19 * 1)}{1 + 1 + 2 + 4 + 1 + 1} = \frac{142}{10} = 14.2$$

واریانس

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{(9 - 14.2)^2 * 1 + (11 - 14.2)^2 * 1 + (13 - 14.2)^2 * 2 + (15 - 14.2)^2 * 4 + (17 - 14.2)^2 * 1 + (19 - 14.2)^2 * 1}{1 + 1 + 2 + 4 + 1 + 1}$$

$$\sigma^2 = 7.36$$

انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{7.36} = 2.71$$

3) داده‌های زیر را داریم . الف) مد(نما) داده ها محاسبه کنید ب- میانه داده ها محاسبه کنید -ج- صدک 83 داده‌ها را محاسبه کنید –د- میانگین و واریانس و انحراف معیار داده ها را محاسبه کنید

نمره = x	13-15	11-13	17-19	9-11	15-17
تعداد =f	2	1	2	1	4

حل : ابتدا جدول را مرتب نموده و فراوانی تجمعی را بدست میاوریم و داده قدیم Xm نام میگذاریم و داده جدید x را که میانگین کران بالا و پایین هر طبقه است بدست میاوریم

نمره = Xm	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19
تعداد =f	1	1	2	4	2
F	1	2	4	8	10
نمره = x	10	12	14	16	18

حل : مد یا نما : همان داده ای است که بیشترین فراوانی(تعداد) را دارد که میشود 15-17 که بایستی دقیقا مشخص کنیم چه عددی بین 15-17 میباشد

$$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) * C = L_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}\right) * C = 15 + \frac{4-2}{(4-2)+(4-2)} * 2 = 16$$

میانه : میانه = وسط صف منظم داده که p=1/2

$$n * p = \left(\sum f_i\right) * p = (1+1+2+4+2) * \left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

$$\rightarrow 5+ \rightarrow \frac{\text{در}}{F} \rightarrow \quad F = 8 \quad \rightarrow \frac{\text{در}}{X} \rightarrow \quad x = 15 - 17$$

میانه عددی بین 15-17 است که برای تعیین دقیق آن

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C \qquad m = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C = 15 + \frac{(1+1+2+4+2) * \left(\frac{1}{2}\right) - 4}{4} * 2 =$$

$$m = 15 + \left(\frac{5-4}{4}\right) * 2 = 15.5$$

صدک 83

$$n * p = \left(\sum f_i\right) * p = (1+1+2+4+2) * \left(\frac{83}{100}\right) = 8.3$$

$$\rightarrow 8.3+ \rightarrow \frac{\text{در}}{F} \rightarrow \quad F = 10 \quad \rightarrow \frac{\text{در}}{X} \rightarrow \quad x = 17 - 19$$

برای محاسبه دقیق صدک 83

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C \qquad Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C = 17 + \frac{(1+1+2+4+2) * \left(\frac{83}{100}\right) - 8}{2} * 2 =$$

$$Q = 17 + \frac{8.3 - 8}{2} * 2 = 17.3$$

میانگین با Xn

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(10*1) + (12*1) + (14*2) + (16*4) + (18*2)}{1+1+2+4+2} = \frac{150}{10} = 15$$

واریانس

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 * f_i}{\sum f_i} = \frac{(10-15)^2 * 1 + (12-15)^2 * 1 + (14-15)^2 * 2 + (16-15)^2 * 4 + (18-15)^2 * 2}{1+1+2+4+2}$$

$$\sigma^2 = 5.8$$

انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{5.8} = 2.4$$

+++++++++++++++++++++++++++

رگرسیون (پیش بینی)

4) - در یک منطقه میزان مصرف سالیانه برق در چند سال گذشته بشرح ذیل میلیون مگاوات ساعت میباشد معادله رخط رگرسیون را نوشته پیش بینی سال 1395 چقدر میباشد

مصرف	5	6	6	7	8	؟؟
	1390	1391	1392	1393	1394	1395

حل : سال 92 را مبنای صفر قرار میدهیم تا راحتتر عملیات ضرب و تقسیم صورت پذیرد

Y=مصرف	5	6	6	7	8	؟؟
x=سال	-2	-1	0	1	2	3

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad , \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \Rightarrow y = a + bx$$

$$y = a + bx \quad , \quad b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad , \quad \bar{y} = a + b\bar{x} \ \rightarrow \ a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

$$= \frac{(5*-2)+(6*-1)+(6*0)+(7*1)+(8*2) - \frac{(-2-1+0+1+2)*(5+6+6+7+8)}{5}}{((-2)^2+(-1)^2+0^2+(1)^2+(+2)^2 - \frac{(-2-1+0+1+2)}{5}}$$

$$b = \frac{-10-6+0+7+16-\frac{0*32}{5}}{4+1+0+1+4-\frac{0}{5}} \qquad b = \frac{7}{10} = 0.7$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-2-1+0+1+2}{5} \qquad \bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{5+6+6+7+8}{5} \qquad \bar{y} = \frac{32}{5} \qquad \bar{y} = 6.4$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \ \rightarrow \ a = 6.4 - 0.7*0 \ \rightarrow \ a = 6.4$$

$$y = a + bx \quad \rightarrow y = 6.4 + 0.7x \quad \rightarrow x = 3 \ \rightarrow 1395 \equiv 3 \ \rightarrow \ y = 6.4 + (0.7*3) = 8.5$$

5) مصرف یک دارو در سه سال گذشته مقادیر زیر بوده در سالهای بعد پیش بینی نمایید

x = سال	93	94	95	96	97
y= مصرف	1	2	4	؟	؟

حل : ابتدا در جدول مقادیر x قدیمی را Xm نام گذاشته و آنرا را تغییر میدهیم مثلا همه را از 94 کم میکنیم

Xm = سال	93	94	95
x	-1	0	+1
y= مصرف	1	2	4

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i * \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1*1)+(0*2)+(1*4) - \frac{(-1+0+1)(1+2+4)}{3}}{((-1)^2+(0)^2+(1)^2) - \frac{(-1+0+1)^2}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1+0+1}{3} = 0 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2.33$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \qquad 2.33 = a + (1.5*0) \qquad a = 2.33$$

$$y = 2.33 + 1.5x$$

$$Xm = 96 \ \rightarrow \ x = 96 - 94 = 2 \ \rightarrow y = 2.33 + (1.5*2) = 5.33$$

$$Xm = 97 \ \rightarrow \ x = 97 - 94 = 3 \ \rightarrow y = 2.33 + (1.5*3) = 6.83$$

+++++++++++++++++++++++++++

6) در یک منطقه میزان مبتلایان به ازدیاد قندخون در چند سال گذشته بشرح ذیل میباشد معادله خط رگرسیون را نوشته پیش بینی سال 1397 چقدر میباشد

سال=x	1393	1394	1395	1397
مصرف	5	7	8	؟؟

حل : ابتدا در جدول مقادیرx قدیمی را Xm نام گذاشته و آنرا را تغییر میدهیم مثلا همه را از 1394 کم میکنیم

سال = Xm	1393	1394	1395
x	-1	0	+1
مصرف =y	5	7	8

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i * \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1*5)+(0*7)+(1*8) - \frac{(-1+0+1)(5+7+8)}{3}}{((-1)^2+(0)^2+(1)^2) - \frac{(-1+0+1)^2}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1+0+1}{3} = 0 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{5+7+8}{3} = \frac{20}{3} = 6.67$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \qquad 6.67 = a + (1.5*0) \qquad a = 6.67$$

$$y = 6.67 + 1.5x$$

$$Xm = 1397 \ \rightarrow \ x = 1397 - 1394 = 3 \ \rightarrow y = 6.67 + (1.5*3) = 11.17$$

ترکیب و احتمال در ترکیب

7) در ظرفی نه توپ داریم (4 توپ سفید 3 توپ سیاه 2 توپ قرمز)

الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ تا سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{1 * \frac{3!}{2!\,(3-2)!} * 2}{\frac{9!}{3!\,(9-3)!}} = \frac{1 * 3 * 2}{84} = \frac{1}{14}$$

ب)سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{0}\binom{2}{1}}{\binom{9}{1}} * \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{1}{0}}{\binom{8}{1}} * \frac{\binom{4}{0}\binom{2}{1}\binom{1}{0}}{\binom{7}{1}} = \frac{2}{9} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} = \frac{1 * 3 * 2}{84} = \frac{1}{42}$$

ج)سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است

$$\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{0}\binom{2}{1}}{\binom{9}{1}} * \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{0}}{\binom{9}{1}} * \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{0}}{\binom{9}{1}} = \frac{2}{9} * \frac{3}{9} * \frac{3}{9} = \frac{2}{81}$$

8) در ظرفی7توپ داریم (1 توپ سفید 4 توپ سیاه 2 توپ قرمز) . الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ سـیاه باشـد چقدر اسـت. ب)سـه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سـیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. ج)سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است.

حل :

$$p = \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1 * 6 * 2}{35} = \frac{12}{35}$$

$$p = \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{0}\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}\binom{1}{0}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0}\binom{3}{1}\binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} = \frac{2}{7} * \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{4}{35}$$

$$p = \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{0}\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}\binom{2}{0}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}\binom{2}{0}}{\binom{7}{1}} = \frac{2}{7} * \frac{4}{7} * \frac{4}{7} = \frac{32}{343}$$

++++++++++++++++++++++++++++

9) یک شـرکت کامپیوتری 10 کامپیوتر دارد 4 تا از آنها معیوب اسـت از این شـرکت 3 کامپیوتر میخریم کلیه احتمالات معیوب برای این 3 کامپیوتر در جدولی شامل تعداد معیوب و چگالی احتمال بنویسید؟

S = سالم   M = معیوب

احتمال 3 سالم و صفر معیوب

$$P_{3S\ \ 0M}=\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{6!}{3!\,(6-3)!}*\frac{4!}{0!\,(4-0)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}}=\frac{\frac{3!*4*5*6}{3!*3!}*1}{\frac{7!*8*9*10}{3!\,7!}}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

احتمال 2 سالم و 1 معیوب

$$P_{2S\ \ 1M}=\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{6!}{2!\,(6-2)!}*\frac{4!}{1!\,(4-1)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}}=\frac{\frac{4!*5*6}{2!*4!}*4}{\frac{7!*8*9*10}{3!\,7!}}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$

احتمال 1 سالم و 2 معیوب

$$P_{1S\ \ 2M}=\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{6!}{1!\,(6-1)!}*\frac{4!}{2!\,(4-2)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}}=\frac{6*\frac{2!*3*4}{2!*2!}}{\frac{7!*8*9*10}{3!\,7!}}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

احتمال صفر سالم و 3 معیوب

$$P_{0S\ \ 3M}=\frac{\binom{6}{0}\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1*\frac{4!}{3!\,(4-3)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}}=\frac{1*\frac{3!*4}{3!*1!}}{\frac{7!*8*9*10}{3!\,7!}}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

X= تعداد معیوب	0	1	2	3
چگالی احتمال(x)P(X=x) = fتابع احتمال	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

بایستی جمع کل احتمالات یک بشود که همینطور هم هست

$$\frac{20}{120}+\frac{60}{120}+\frac{36}{120}+\frac{4}{120}=\frac{120}{120}=1$$

10) در کارخانه ای 15 فوق لیسانس و 20 لیسانس و 30 فوق دیپلم وجود دارد

میخواهیم کمیته 8 نفره شامل 2 فوق لیسانس و 3 لیسانس و 3 فوق دیپلم تشکیل دهیم به چند طریق میتوان این کمیته تشکیل داد؟

از این کمیته 3 نفر انتخاب میکنیم احتمال اینکه 2 فوق لیسانس و یک فوق دیپلم باشد چقدر است

$$\binom{15}{2}\binom{20}{3}\binom{30}{3}=\frac{15!}{2!*(15-2)!}*\frac{20!}{3!*(20-3)!}*\frac{30!}{3!\,(30-3)!}=$$

$$\frac{13!*14*15}{2!*13!}*\frac{17!*18*19*20}{3!*17!}*\frac{27!*28*29*30}{3!*27!}=\frac{14*15}{1*2}*\frac{18*19*20}{1*2*3}*\frac{28*29*30}{1*2*3}=\cdots.$$

$$P=\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{1*3*2}{\frac{8!}{3!*5!}}=\frac{6}{\frac{5!*6*7*8}{1*2*3*5!}}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

++++++++++++++++++++++++++++

قضیه بیز

11) کارخانه ایران خودرو 6 روز هفته فعال است

تعداد اتومبیلهای ساخته شده در هر روز یکسان است. احتمال اتومبیل به رنگ سفید در روزهای مختلف هفته: شنبه 30٪ یکشنبه 50٪

دوشنبه 40٪ سه شنبه 30٪ چهارشنبه 20٪ پنجشنبه 10%

اتومبیلی خریدیم رنگ آن سفید بود . احتمال اینکه روز شنبه ساخته شده باشد چقدر است؟

حل:

رنگ سفید =w ضمنا احتمال وقوع هر روز هفته مثلا احتمال یکشنبه یک روز از کل شش روز میباشد

D0شنبه	D1یکشنبه	D2دوشنبه	D3سه شنبه	D4چهارشنبه	D5پنجشنبه
%30	%50	%40	%30	%20	%10

$$P(d0|w)=\frac{p(d0)*p(w|d0)}{\sum p(di)*p(w|di)}$$
$$=\frac{p(d0)*p(w|d0)}{[p(d0)*p(w|d0)]+[p(d1)*p(w|d1)]+[p(d2)*p(w|d2)]+[p(d3)*p(w|d3)]+[p(d4)*p(w|d4)+p(d5)*p(w|d5)}$$
$$=$$

$$p(d0|w)=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)*\left(\frac{30}{100}\right)}{\left[\left(\frac{1}{6}\right)*\left(\frac{30}{100}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{6}\right)*\left(\frac{50}{100}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{6}\right)*\left(\frac{40}{100}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{6}\right)*\left(\frac{30}{100}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{6}\right)*\left(\frac{20}{100}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{6}\right)*\left(\frac{10}{100}\right)\right]}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

12) داروی ضد سرطانی ساختیم که هنوز مراحل ازمایشی خود را میگذراند

روی بیمارانی که واقعا سرطان داشتند آزمایش تشخیص سرطان کردیم در مورد 90٪ بیماران سرطانی جواب مثبت میدهد یعنی خوشبختانه سیستم دارویی ما نشان داد که سرطان دارند

روی بیمارانی که واقعا سرطان نداشتند آزمایش تشخیص سرطان کردیم در مورد 20٪ بیماران غیر سرطانی جواب مثبت میدهد یعنی متاسفانه نشان داد که سرطان دارند

از بین بیماران یک بیمارستان که 5٪ آنها سرطانی هستند بیماری بتصادف انتخاب میکنیم . آزمایش تشخیص سرطان در مورد این بیمار جواب مثبت میدهد احتمال اینکه این بیمار واقعاً سرطانی باشد چقدر است.

حل : سرطانی = S1 غیرسرطانی =S2 مثبت = A

$$P(S1|A)=\frac{p(S1)*p(A|S1)}{\sum p(Si)*p(A|Si)}=\frac{p(S1)*p(A|S1)}{p(S1)*p(A|S1)+p(S2)*p(A|S2)}=$$

$$P(S1|A)=\frac{\left(\frac{5}{100}\right)*\left(\frac{90}{100}\right)}{\left[\left(\frac{5}{100}\right)*\left(\frac{90}{100}\right)\right]+\left[\left(\frac{95}{100}\right)*\left(\frac{20}{100}\right)\right]}=\frac{\left(\frac{450}{10000}\right)}{\left(\frac{450}{10000}\right)+\left(\frac{1900}{10000}\right)}=\frac{45}{235}=\frac{9}{47}$$

13) آزمایشگاهی 6 روز هفته فعال است. تعداد آزمایشهای انجام شده در هر روز یکسان است. احتمال خطا در آزمایش سرطان در روزهای مختلف هفته: شنبه 5٪ یکشنبه 2٪ دوشنبه 1٪ سه شنبه 1٪ چهارشنبه 2٪ پنجشنبه 3% است. نتیجه آزمایشگاه برای تشخیص سرطان برای شخصی خطا داشت . احتمال اینکه روز یکشنبه آزمایش انجام شده باشد چقدر است.

حل : خطا را W و شنبه T0 و یکشنبه T1 و ... نام میگذاریم

$$P(T1|W)$$
$$=\frac{P(T1)*P(W|T1)}{P(T0)*P(W|T0)+P(T1)*P(W|T1)+P(T2)*P(W|T2)+P(T3)*P(W|T3)+P(T4)*P(W|T4)}=$$
$$P(T1|W)=\frac{\frac{1}{6}*\frac{2}{100}}{\left(\frac{1}{6}*\frac{5}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{2}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{2}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{3}{100}\right)}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$$

14) موسســه زند کل کامپیوترهای مورد نیازش را از سـه شـرکت 25٪ از شـرکت A – 35٪ از شـرکت B و 40٪ از شـرکت C تامین میکند - میزان کامپیوترهای معیوب در سـه شرکت – 2٪ شرکت A – 3٪ شرکت B - 1٪ شرکت C معیوب میباشد. یک کامپیوتر از انبار موسسه برمیداریم. الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟ ج) اگر این کامپیوتر خراب باشد احتمال اینکه از شرکت C باشد چقدر است؟

	در صد تامین نیاز	در صد معیوب
A	25%	2%
B	35%	3%
C	40%	1%

M = معیوب

$$p(M) = p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) + p(C) * p(M|C)$$

$$p(M) = \left(\frac{25}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{35}{100} * \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{40}{100} * \frac{1}{100}\right) = 0.0195$$

$$1 - p(M) = 1 - 0.0195 = 0.9805$$

$$p(C|M) = \frac{p(C) * p(M|C)}{p(A) * p(M|A) + p(B) * p(M|B) + p(C) * p(M|C)}$$

$$p(C|M) = \frac{\frac{40}{100} * \frac{1}{100}}{\left(\frac{25}{100} * \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{35}{100} * \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{40}{100} * \frac{1}{100}\right)} = \frac{\frac{40}{10000}}{\frac{195}{10000}} = \frac{40}{195}$$

15) کمدی سه طبقه دارد در طبقه اول 4 کتاب تاریخ و 7 کتاب ریاضی - طبقه دوم 8کتاب تاریخ و 6 کتاب ریاضی - طبقه سوم 5 کتاب تاریخ و 3 کتاب ریاضی وجود دارد یک طبقه بتصادف انتخاب و یک کتاب بیرون میاوریم ملاحظه میکنیم کتاب تاریخ است، احتمال اینکه از طبقه سوم باشد چقدر است

رخداد= کتاب تاریخ = A   T3= طبقه سوم

$$P(T3|A) = \frac{P(T3).P(A|T3)}{P(T1).P(A|T1) + P(T2).P(A|T2) + P(T3).P(A|T3)}$$

$$P(T3|A) = \frac{(\frac{1}{3} * \frac{5}{8})}{\left(\frac{1}{3} * \frac{4}{11}\right) + (\frac{1}{3} * \frac{8}{14}) + (\frac{1}{3} * \frac{5}{8})} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{4}{33} + \frac{8}{42} + \frac{5}{24}} = \cdots \ldots$$

اجتماع و اشتراک در احتمال

16) در یک آزمایشـــگاه پزشـــکی با دو کارمند اپراتور آزمایش پزشـــکی، احتمال خطای آزمایش اپراتور اول 0.15 و احتمال خطای آزمایش اپراتور دوم 0.10 و احتمال اینکه هر دو اپراتور با هم مرتکب خطا شـوند 0.02 و احتمال اینکه رئیس آزمایشـگاه حضـور نداشـته باشـد 0.01 است. الف) احتمال خطای اپراتور اول یا دوم چقدر اسـت؟ ب) احتمال اینکه اصـلا خطا رخ ندهد چقدر است؟ ج) احتمال اینکه خطای اپراتور اول یا عدم حضور رئیس رخ دهد چقدر است؟ د) احتمال اینکه خطای اپراتور اول و عدم حضور رئیس رخ دهد چقدر است؟

عدم حضور رئیس=B خطای اپراتور دوم=E خطای اپراتور اول=F

الف احتمال اینکه اپراتور اول یا اپراتور دوم خطا کند

$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$=0.10+0.15-0.02=0.23

ب) احتمال اینکه خطا نشود عبارتست از

1-$P(E\cup F)=1-$0.23=0.77

ج) عدم حضور رئیس و خطای دو اپراتور پیشامد مستقل هستند احتمال اپراتور اول خطا یا رئیس حاضر نباشد

$P(F\cup B)=P(F)+P(B)=0.15+0.01=0.16$

د) احتمال اپراتور اول خطا و رئیس حاضر نباشد چون خطا اپراتور و عدم حضور رئیس بهم ربطی ندارد مستقل هستند

$$P(F\cap B)=P(F)*P(B)=0.15*0.01=0.0015$$

17) در پرتاب دو تاس همگن اگر پیش آمد A آمدن خال فرد در تاس اول و پیش آمدن B مجموع خال های دو تاس 4 باشد مطلوبست بدست آوردن احتمال P(A-B)

$S1=\{1,2,3,4,5,6\}$
$S2=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$S12=\begin{Bmatrix}11,12,13,14,15,16\\21,22,23,24,25,26\\31,32,33,34,35,36\\41,42,43,44,45,46\\51,52,53,54,55,56\\61,62,63,64,65,66\end{Bmatrix}$$

$$A=\begin{Bmatrix}11,12,13,14,15,16\\ \\31,32,33,34,35,36\\ \\51,52,53,54,55,56\end{Bmatrix}$$

$B=\{13,22,31\}$

$$A-B=\begin{Bmatrix}11,12,14,15,16\\ \\32,33,34,35,36\\ \\51,52,53,54,55,56\end{Bmatrix}$$

$$P(A-B)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

روش دوم

$A\cap B=\{13,31\}$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{18}{36}-\frac{2}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

فضای احتمالات تابع چگالی و توزیع و امید ریاضی و واریانس

18) یک سکه را دو بار پرتاب میکنیم برای رو آمدن (شیر) جدول تابع چگالی و تابع توزیع را بنویسید و منحنی هر دو تابع را رسم کنید امید شیر بدست آورید

حل: اگر شیر = H و خط = T بنامیم

S={HH,HT,TH,TT}

تعداد کل حالات چهار تا است و احتمال هر حالت یکی از چهار تا است

تعداد شیر	X		0	1	2
چگالی احتمال	f(x)		¼	2/4	¼
چگالی توزیع	F(x)	0	¼	3/4	(4/4)=1

$$\text{امید} = E(x) = \sum x * f(x) = \left(0 * \frac{1}{4}\right) + \left(1 * \frac{2}{4}\right) + \left(2 * \frac{1}{4}\right) = 1$$

منحنی هر دو تابع ....

19) یک سکه را سه بار پرتاب میکنیم برای رو آمدن (شیر) جدول تابع چگالی f(x) را بنویسید

S={HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

تعداد شیر	3	2	2	1	2	1	1	0
احتمال هر مورد	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

X=تعداد شیر	0	1	2	3
تابع احتمال P(X=x) = f(x) چگالی احتمال	1/8	3/8	3/8	1/8

20) صاحب دستگاهی هستیم که دارای نمایش سه سکه هست، بازیکنان دسته بازی را یک نوبت که فشار میدهند نمایش سه سکه تغییر میکند میخواهیم بازاء یک مورد روی سکه(یک شیر) 1000 تومان و بازا دو مورد روی سکه(دوشیر) 4000 تومان و بازاء سه مورد روی سکه (سه شیر) میخواهیم 8000 تومان جایزه بدهیم – از بازیکنان در هر نوبت بازی چقدر بگیریم تا در هر بازی بطور میانگین امید این را داشته باشیم که 500 تومان سود کنیم.

حل : اگر شیر=H و خط = T بنامیم پولی که در هر نوبت میگیریم a و پولی که از دست میدهیم با علامت منفی نمایش دهیم کل حالات بشرح ذیل میشود

راه حل اول

وضعیت x		HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
f(x)		1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
F(x)	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	(8/8)=1
پولی که میگیریم		A	a	a	A	a	A	A	A
پولی که میدهیم		-8000	-4000	-4000	-1000	-4000	-1000	-1000	0

$\text{امید} = \sum xf(x) = 500$

$$(a-8000)*\left(\frac{1}{8}\right)+(a-4000)*\left(\frac{1}{8}\right)+(a-4000)*\left(\frac{1}{8}\right)+(a-1000)*\left(\frac{1}{8}\right)+(a-4000)*\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$+(a-1000)*\left(\frac{1}{8}\right)+(a-1000)*\left(\frac{1}{8}\right)+(a-0)*\left(\frac{1}{8}\right)=500$$

$$\frac{(a-8000)+(a-4000)+(a-4000)+(a-1000)+(a-4000)+(a-1000)+(a-1000)+a}{8} = 500$$

$$\frac{8a-23000}{8} = 500 \quad \rightarrow \quad 8a-23000 = 8*500 \quad \rightarrow \quad 8a = 27000 \quad \rightarrow \quad a = 3375$$

اگر در هر نوبت 3375 تومان بگیریم آنگاه بطور متوسط در هر نوبت 500 تومان سود میکنیم

راه حل دوم :

X= تعداد شیر		0	1	2	3
f(x)		1/8	3/8	3/8	1/8
F(x)	0	1/8	4/8	7/8	(8/8)=1
پولی که میگیریم		a	a	A	a
پولی که میدهیم		0	-1000	-4000	-8000

$\text{امید} = \sum xf(x) = 500$

++++++++++++++++++++++++++++

$$(a-0)*\left(\frac{1}{8}\right)+(a-1000)*\left(\frac{3}{8}\right)+(a-4000)*\left(\frac{3}{8}\right)+(a-8000)*\left(\frac{1}{8}\right)=500$$

$$\frac{(a-0)+(3a-3000)+(3a-12000)+(a-8000)}{8}=500$$

$$\frac{8a-23000}{8}=500 \quad \rightarrow \quad 8a-23000=8*500 \quad \rightarrow \quad 8a=27000 \quad \rightarrow \quad a=3375$$

21) اگر X تعداد شیر ناشی از 2 بار پرتاب سکه باشد

الف) تابع چگالی X بدست آورید

ب) مطلوبست

$P(x\epsilon A) \qquad A=(0.5,2]$

ج) تابع توزیع متغیر تصادفی X را بدست آورید

د) این مقادیر را بدست آورید

$$E(x)=? \quad \sigma(x)=? \qquad E(x<2)$$

$S=\{HH,HT,TH,TT\}$

X=تعداد شیر	0	1	2	
f(X)	¼	2/4	¼	
F(X) 0	¼	3/4	4/4=1	

چون $A=(0.5,2]$ آنگاه

$$P(x\epsilon A) \quad = P(0.5<x\leq 2)=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$E(x) \quad =\left(0*\frac{1}{4}\right)+\left(1*\frac{2}{4}\right)+\left(2*\frac{1}{4}\right)=0+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1$$

$$E(x<2) \quad =\left(0*\frac{1}{4}\right)+\left(1*\frac{2}{4}\right)=0+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$E(x^2)=\left(0^2*\frac{1}{4}\right)+\left(1^2*\frac{2}{4}\right)*\left(2^2*\frac{1}{4}\right)=0+\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\sigma^2(x)=E(x^2)-\left(E(x)\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)-(1^2)=0.5$$

$$\sigma(x)=\sqrt{0.5}=$$

تابع چگالی گسسته و توزیع و امید ریاضی و واریانس

22) - در تابع چگالی احتمال زیر مقدار K را بدست آورید

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{3k+1} & x = 0,1,3 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{bmatrix}$$

جدول تابع چگالی با این مقدار K بنویسید و صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید و در همان جدول تابع توزیع را بنویسید و امید ریاضی E(x) را محاسبه کنید.

حل :

$$\sum f(x) = 1 \quad \rightarrow \quad \sum \frac{x}{3k+1} = 1$$

$$\frac{0}{3k+1} + \frac{1}{3k+1} + \frac{3}{3k+1} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3k+1} = 1 \quad \rightarrow 3k+1 = 4 \quad \rightarrow k = 1$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{3k+1} & x = 0,1,3 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{bmatrix} \quad \rightarrow f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{4} & x = 0,1,3 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{bmatrix}$$

X	0	1	3
f(x)	(0/4)=0	1/4	¾
F(x)	0 0/4	1/4	(4/4)=1

$$E(x) = \sum x * f(x) = (0*0) + \left(1*\frac{1}{4}\right) + \left(3*\frac{3}{4}\right) = 10/4 = \frac{5}{2} = 2.5$$

23) در تابع چگالی احتمال زیر مقدار K را بدست آورید

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{2k+1} & x = 0,2,3 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{bmatrix}$$

جدول تابع چگالی با این مقدار k بنویسید و صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید و درجدول زیر مقادیر تابع چگالی و توزیع را بنویسید و امید ریاضی E(x) و $\sigma^2(x)$ و $\sigma(x)$ و $p(x \geq 2)$ را محاسبه کنید

x			
f(x)			
F(x)			

حل

$$\sum f(x) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{0}{2k+1} + \frac{2}{2k+1} + \frac{3}{2k+1} = 1 \quad \rightarrow \quad 2k+1 = 5 \quad \rightarrow \quad k = 2$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x}{5} & x = 0,2,3 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{bmatrix}$$

x	0	2	3	
f(x)	$\frac{0}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\sum f(x) = 1$ ok $0 \leq f(x) \leq 1$ ok
F(x) 0	$\frac{0}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{5} = 1$	

$$E(x) = \sum x * f(x) = \left(0*\frac{0}{5}\right) + \left(2*\frac{2}{5}\right) + \left(3*\frac{3}{5}\right) = \frac{13}{5} = 2.6$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \sum x^2 * f(x) = \left(0^2*\frac{0}{5}\right) + \left(2^2*\frac{2}{5}\right) + \left(3^2*\frac{3}{5}\right) = \frac{35}{5} = 7$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 = (7) - (2.6^2) = \qquad \sigma(x) = \sqrt{.24} = 0.48$$

$$p(x \geq 2) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

** تابع چگالی پیوسته و توزیع و امید ریاضی و واریانس

24) در تابع چگالی احتمال زیر مقدار K را بدست آورید

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{2x+3}{k+1} & 1 \le x \le 3 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{bmatrix}$$

جدول تابع چگالی با این مقدار K بنویسید و صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید و در همان جدول تابع توزیع را بنویسید و امید ریاضی E(x) را محاسبه کنید

حل:

$$\int f(x)dx = 1$$

$$\int_1^3 \frac{2x+3}{k+1}dx = 1 \rightarrow \frac{1}{k+1}[\int 2xdx + \int 3dx] = 1 \rightarrow \frac{1}{k+1}\left\{\left[2\frac{x^2}{2}|_1^3 + 3x|_1^3\right]\right\} = 1$$

$$\frac{1}{k+1}[(9-1)+3(3-1)] = 1 \rightarrow \frac{1}{k+1}(14) = 1 \rightarrow k+1 = 14 \rightarrow k = 13$$

X		$1 \le x \le 3$	
f(x)		$\int \frac{2x+3}{14}dx$	
F(x)	0	$\int_{-\infty}^{x} \frac{2x+3}{14}dx$	1

$$E(x) = \int xf(x) = \int_1^3 x\frac{2x+3}{14}dx = \frac{1}{14}\int (2x^2+3x)dx = \frac{1}{14}(2\frac{x^3}{3}|_1^3 + 3\frac{x^2}{2}|_1^3)$$

$$= \frac{1}{14}\{\left(\frac{2}{3}(27-1) + \frac{3}{2}(9-1)\right\} = \frac{44}{21}$$

25) تابع چگالی برای متغیر تصادفی پیوسته X بصورت زیر میباشد

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{2x}{25} & 0 \le x \le 5 \\ 0 & \text{دیگر} \end{Bmatrix}$$

اگر پیشامد $A = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right)$ باشد $P(x\epsilon A)$ بدست آورید

این مقادیر بدست آورید $\sigma(x)$ $E(x)$

حل : ابتدا ببینیم واقعا f(x) تابع چگالی میباشد.

بررسی کردن دو شرط تابع چگالی

$$0 \le f(x) \le 1 \qquad \int f(x)dx = 1$$

$$\int f(x)dx = \int_0^5 \frac{2x}{25}dx = \frac{2}{25} * \frac{x^2}{2} = \frac{1}{25} * |x^2|_0^5 = \frac{1}{25}(25-0) = 1$$ شرط اول برقرار شد

اگر هر یک از دو حد 0 و 5 را در تابع f(x) بگذاریم بین صفر تا یک میشود پس شرط دیگر هم برقرار است حال به سوال بعد جواب میدهیم

$$P(x\epsilon A) = \int f(x)dx = \int_{5/3}^{5/2} \frac{2x}{25}dx = \frac{2}{25} * \frac{x^2}{2} = \frac{1}{25}|x^2|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{25}\left(\frac{25}{4} - \frac{25}{9}\right) = \frac{5}{36}$$

$$E(x) = \int x * f(x)\,dx = \cdots..$$

$$E(x^2) = \int x^2 * f(x)\,dx = \cdots.$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \cdots.$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)} \quad = \ldots.$$

تابع چگالی احتمال دوجمله ای و نرمال و پواسن – تابع توزیع – امید و واریانس

26) سکه همگنی 400 بار پرتاب میکنیم اگر پرتاب ها نرمال باشد
اگر فقط جدول توزیع نرمال را در اختیار داشته باشیم   حساب کنید احتمال اینکه ؟ الف) از 185 پرتاب تا 210 پرتاب شیر مشاهده شود؟
ب) دقیقا 205 شیر مشاهده شود؟ ج) کمتر از 176 یا بیشتر از 227 شیر مشاهده شود؟
حل : پرتاب سکه تابع توزیع احتمال دوجمله ای است   حال احتمال شیر

$$p = \frac{1}{2} = 0.5$$

در تابع توزیع دوجمله ای   میانگین برابر است با

$$\mu = np = 400 * 0.5 = 200$$

در تابع توزیع دوجمله ای   انحراف معیار برابر است با

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 * \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})} = \sqrt{100} = 10$$

چون در صورت سوال مطرح شده که پرتاب ها نرمال میباشد پس میتوان گفت که که میتوان این توزیع دوجمله ای را از طریق جدول توزیع نرمال حل نمود

$$p(185 \le x \le 210) = p(x \le 210) - p(x \le 185) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{210-200}{10}\right) - P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{185-200}{10}\right)$$
$$= p(z \le 1) - p(z \le -1.5) = 0.8413 - 0.0668 = 0.7745$$
$$p(x = 205) = P(x \le 205) - P(x \le 204) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{205-200}{10}\right) - P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{204-200}{10}\right) =$$
$$= p(z \le 0.5) - p(z \le 0.4) = 0.6915 - 0.6554 = 0.0361$$
$$p(176 \ge x \le 227) = \{1 - p(x \le 175)\} + p(x \le 227) = 1 - P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{175-200}{10}\right) + P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{227-200}{10}\right)$$
$$= 1 - p(z \le 2.5) + p(z \le 0.7) = 1 - 0.9938 + 0.7580 = 0.7642$$

27) دریک کلاس 40 نفره با توزیع نرمال میانگین نمرات کلاس 14واریانس 16 میباشد الف)احتمال اینکه نمره دانشجویی کمتر یا مساوی از 10 شود چقدر است ب) احتمال اینکه نمره دانشجویی بیشتر از 16 شود چقدر است؟ ج احتمال اینکه نمره دانشجوی بین15 تا 17شود (برای جدول نرمال استاندارد چنین فرض کنید)

$$p(z \le 2) = 0.98\,,\ p(z \le 1.5) = 0.93\,,\ p(z \le 1) = 0.85\ ,p(z \le 0.5) = 0.7\ ,p(z \le 0) = 0.5$$
$$p(z \le -2) = 0.02\,,p(z \le -1.5) = .0.07,\ p(z \le -1) = 0.15\ ,p(z \le -0.5) = 0.3$$

حل :

$$\mu = 14 \ \rightarrow \sigma^2 = 16 \ \rightarrow \sigma = 4$$
$$p(x \le 10) =? \rightarrow \quad p(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{10-14}{4}) =? \quad \rightarrow \quad p(z \le -1) =?$$

بر طبق جدول در صورت مسئله فوق $\rightarrow \quad p(z \le -1) = 0.15$

$$p(x > 16) =? \rightarrow p(x > 16) = 1 - p(x \le 16) \ \rightarrow\ 1 - p(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{16-14}{4}) =? \ \rightarrow \quad p(z \le +0.5) =?$$

بر طبق جدول فوق $\rightarrow \quad p(z \le +0.5) = 0.7$

$$p(15 < x < 17) =? \ \rightarrow\ p(15 < x < 17) = p(x < 17) - p(x < 15) = p(x \le 16) - p(x \le 14) =$$
$$p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{16-14}{4}\right) - p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{14-14}{4}\right) = p(z \le +0.5) - p(z \le 0) \rightarrow \text{جدول طبق} = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

28) احتمال اینکه محصول کارخانه ای استاندارد باشد 80% میباشد 5 محصول از کارخانه میخریم اگر x نشاندهنده تعداد محصول استاندارد باشد
الف) نوع توزیع مشخص کنید   ب) فرمول آنرا بنویسید ج) میانگین واریانس را محاسبه کنید
توزیع دوجمله ای بدلیل دو وضعیتی بودن(استاندارد 0.8 - غیر استاندارد 0.2)

$$f(x) = \binom{5}{x}(0.8)^x(1-0.8)^{5-x}$$
$$\mu = n * p = 5 * 0.8 = 4$$
$$\sigma^2 = n * p * q = n * p * (1-p) = 5 * 0.8 * 0.2 = 0.8$$

29) یک تلفنچی 10٪ از تلفنها را اشتباه وصل میکند اگر در یک ساعت 20 تلفن وصل کرده باشد
الف) احتمال اینکه 5 شماره را اشتباه وصل کرده باشد چقدر است ب) احتمال اینکه بیش از 2 شماره اشتباه وصل کرده باشد چقدر است
حل : چون احتمال در حوزه زمان است   پس تابع توزیع احتمال پواسن است   میانگین یا متوسط اشتباه وصل کردن تلفن در یکساعت برابر است با
$\boldsymbol{\lambda}$=10%*20=2 $\rightarrow$ یعنی بطور متوسط از وصل 20 تلفن دو تلفن اشتباه وصل میکند

$$f(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2}2^x}{x!} \qquad f(x=5) = \frac{e^{-2}2^5}{5!}$$
$$f(x > 2) = \sum_{3}^{20} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1 - f(x \le 2) = 1 - \sum_{0}^{2} \frac{e^{-2}2^x}{x!}$$

** تابع چگالی توام – تابع توزیع – امید و واریانس

30) ظرفی دارای 2 مهره سـفید و 3 مهره سیاه است – یک مهره از ظرف برداشته و متغیر تصادفی x را برابر تعداد مهره سفید انتخابی در نظر میگیریم – از مابقی مهره ها 2 مهره بر میداریم و متغیر تصـادفی y را برابر تعداد مهره سـفید برای این دو انتخاب در نظر میگیریم الف- تابع چگالی احتمال و جدول توزیع احتمال (x,y) بدست آورید. ب- مقدار امید $E(xy)$ و $E(x^3y)$ را بدست آورید(3نمره)

حل: سفید را w و سیاه را b مینامیم
یک مهره بر میداریم احتمال دارد سفید باشد و احتمال دارد سیاه باشد پس دو احتمال زیر حاصل میشود

$$p_{1w} = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{5}{1}} = \frac{2}{5} \qquad p_{1b} = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{3}{5}$$

حالت اول: اگر مهره اول سفید باشد و از مابقی مهره ها دو مهره بر میداریم ممکن است بصورتهای زیر باشد

$$p_{2w3b} = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} \qquad p_{2b3b} = \frac{\binom{1}{0}\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} \qquad p_{2w3w} = not\ possible$$

پس نتیجه مهره اول سفید و مهره دوم بصورتهای ذیل میشود

$$p_{1w-2w3w} = not\ possible \qquad p_{1w-2w3b} = \frac{2}{5} * \frac{3}{6} = \frac{1}{5} \qquad p_{1w-2b3b} = \frac{2}{5} * \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$$

حالت دوم: اگر مهره اول سیاه باشد و از مابقی مهره ها دو مهره بر میداریم ممکن است بصورتهای زیر باشد

$$p_{2w3w} = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} \qquad p_{2w3b} = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{4}{6} \qquad p_{2b3b} = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$p_{1b-2w3w} = \frac{3}{5} * \frac{1}{6} = \frac{1}{10} \qquad p_{1b-2w3b} = \frac{3}{5} * \frac{4}{6} = \frac{2}{5} \qquad p_{1b-2b3b} = \frac{3}{5} * \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$

متغیر X را اولین مهره سفید نامگذاری کردیم و متغیر Y را دومین و سومین مهره سفید نامگذاری کردیم بنابراین تابع چگالی توام

Y X	0	1	Sum
0	1/10	1/5	3/10
1	2/5	1/5	3/5
2	1/10	Not Possible	1/10
Sum	6/10	2/5	1

$$E(xy) = \sum\sum xyf(x,y) = (0*0*\frac{1}{10}) + \left(0*1*\frac{1}{5}\right) + \left(1*0*\frac{2}{5}\right) + \left(1*1*\frac{1}{5}\right) + (2*0*\frac{1}{10}) = \frac{1}{5}$$

$$E(x^3y) = \sum\sum x^3yf(x,y) = (0^3*0*\frac{1}{10}) + \left(0^3*1*\frac{1}{5}\right) + \left(1^3*0*\frac{2}{5}\right) + \left(1^3*1*\frac{1}{5}\right) + (2^3*0*\frac{1}{10}) = \frac{1}{5}$$

در خصوص سوالهای فوق – سوالات مشابه در آخر جزوه آمار و احتمالات مهندسی در www.aminsedighi.ir درج شده است