بسم‌الله الرحمن الرحیم

آمار و احتمالات

مقدماتی

و

مهندسی

این جزوه با تلاش این حقیر، جهت دانلود مجانی برای همه شما سروران تهیه شده است

بدیهی است خالی از ایراد نیست

هر گونه اشکالی به sedighias220@yahoo.com ارسال نمایید

با تشکر (امین صدیقی)

علم آمار

آمار :

روش و چگونگی جمع آوری اطلاعات و بیان آنها در قالب عدد

احتمال :

تجزیه و تحلیل اطلاعات عددی جمع آوری شده

استنباط :

قضاوت درباره کل اطلاعات وقتی بخشی از آن رؤیت شده

جمعیت :

مجموعه تمام عناصری که دارای یک یا چند ویژگی مشترک باشند

نمونه:

بخشی از جمعیت میباشد

متغیر:

یک ویژگی که از فردی به فرد دیگر در یک جمعیت (نمونه) تغییر میکند

1- متغیر کمی (وزن یا قد)
2- متغیر توصیفی (مهارت یا هوش)

مقیاس سازی

1- مقیاس اسمی (تهران 021 - شیراز 0711)
2- مقیاس ترتیبی (ضعیف 0 – متوسط 1 – خوب 2)
3- مقیـاس فاصـــله ای ($x=at+b$ که $b<>0$ مثلاً $f=9/5(c+32)$) در این مقیاس صـــفر بمعنی هیچ نیست
4- مقیاس نسبتی ($x=at$) صفر بمعنی هیچ است این مقیاس خوبی است

داده :

1- داده گسسسته (تعداد فرزند)
2- داده پیوسته (طول قد)

مشخص کننده مرکزی

1- میانگین (حسابی – وزنی – هندسی – توافقی و ...)
2- میانه (وسط صف منظم داده ها) m
3- نما (داده ای که بیشتر تکرار شده) M

4- میانگین و واریانس (میانگین و میزان انحراف داده ها از میانگین)

5- چارک – دهک – صدک یعنی داده ها ار این چندک کوچکترند (ابتدا داده ها را مرتب کنیم سپس تعداد داده ها (n) را در نسبت مربوط به چندک (p) ضرب کنید n*p (در صورت اعشاری بودن آن را به بالا گرد کنید و داده را استخراج نمایید p_{4}. در صورت مساوی بودن آن - میانگین آن داده و داده بالاتر را استخراج کنید) تا محل قرار گرفتن چندک معلوم شود.

صدک (P) : صدک چهلم یا دهک چهارم است و دادهای است که 40 درصد دادهها از آن کوچکتر است. بدیهی است که 60 درصد دادهها از آن بزرگتر باشد.

دهک ها، حالت خاص صدک ها هستند و به ترتیب به صدک های دهم، بیستم، سی ام و... و نودام، به ترتیب دهک اول، دوم، سوم و ... نهم گفته میشود.

چارک Q: چارک سوم Q_{3} است دادهای است که سه چهارم (75٪) دادهها از آن کوچکتر است. بدیهی است که یک چهارم (25٪) دیگر دادهها از آن بزرگتر باشد.

1) مثال

صدک 65 دادههای زیر را معلوم کنید. 3.2-3.6-3.5-3.7-3.9-3.8-4.0-4.3-4.4-3.5

حل : ابتدا دادهها مرتب میکنیم و یک ردیف بنام ردیف (فراوانی تجمعی) تشکیل میدهیم

Data=Xi	3.2	3.5	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.3	4.4
F	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

برای محاسبه صدک 65 باید تعداد داده ها را در 65٪ ضرب کنیم. (65٪ نسبت مربوط به صدک 65 است)

n*p=10*0.65=6.5　　6.5+(=7)　　　n=>در سطر　　n=7 ➔ X=3.9

بنابراین عدد هفتم، صدک 65 ام است یعنی:　　P_{65}=3.9

یعنی 65٪ دادها مقدارعددیشان از 3.9 کمتر است

2) مثال

دهک چهارم دادههای زیر را معلوم کنید

7.5- 8.3 -9.8-2.3 – 3- 3.1 –3.2- 3.4 – 3.8- 4 – 4.4- 3.5- 5.3- 6.1- 6.9

دادهها را مرتب میکنیم

Xi	2.3	3	3.1	3.2	3.4	3.5	3.8	4	4.4	5.3	6.1	6.9	7.5	8.3	9.8
fi	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

برای محاسبه دهک چهارم باید تعداد داده ها (n=15) را در0.4 ضرب کنیم

n*p=15*0.4=6　　6+➔ F ➔ F=7　　7➔X ➔X=3.8

یعنی 40%داده ها کمتر از 3.8 ام است یعنی:　　P_{40}=3.8

چندک برای داده پیوسته :

ستون فراوانی تجمعی را تشکیل دهید

مقدار n*p را محاسبه کنید

از ستون فراوانی تجمعی طبقه چندک دار را معلوم کنید.

از فرمول مقابل استفاده کنید

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C$$

توجه شود در داده پیوسته حتما حدود و فاصله طبقات باید مساوی باشد

3) مثال

برای دادههای جدول زیر دهک سوم را بدست آورید.

حدود طبقات	f_i
7-10	13
1-4	8
4-7	6
10-13	16
13-16	7

حل : ابتدا طبقات مرتب و سپس فراوانی تجمعی حساب میکنیم

برای دهک سوم P_{30} ستون فراوانی تجمعی را به دست می آوریم

i	حدود طبقات	f_i	F_i
1	1-4	8	8
2	4-7	6	14
3	7-10	13	27
4	10-13	16	43
5	13-16	7	50

$n \times p = ۵۰ \times ۰/۳ = ۱۵$

عدد 15 که مثبت گرد شود در ستون فراوانی تجمعی به 27 میرسیم که در طبقه سوم i=3 است.

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C$$

i = طبقه گرد شده   Li = داده کران پایین در همان طبقه گردشده   C = فاصله طبقات   Fi فراوانی تجمعی

fi فراوانی

$$Q_{0.3} = 7 + \frac{50 * 0.3 - 14}{13} * 3 = 7.23$$

تذکر : میانه = عدد چارک دوم = دهک پنجم = صدک پنجاهم

4) مثال

دادههایی بشرح ذیل داریم صدک 60 چه مقدار میشود

13-14-13-15-13-17-14-12-15-17

داده را مرتب مینماییم و یک سطر (ردیف) ایجاد میکنیم

دادهXi	12	13	13	13	14	14	15	15	17	17
تعدادfi	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
تجمیع F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

n*p=10*(60/100)=6 ⇨ در تجمیع 6+ == 7 ⇨ داده متناظر با تجمیع مربوطه ⇨ x=15

صدک شصت (شصت درصد) داده 15 یا کمتر از آن میباشد

اگر همان داده را به صورت جدول فراوانی و تجمع فراوانی بنویسیم

Xi داده	12	13	14	15	17
fi تعداد	1	3	2	2	2
Fi	1	4	6	8	10

$n=\sum f_i$=1+3+2+2+2=10

n*p=10*(60/100)=6 ⇨ 6+ ⇨ در ردیف Fi 6+ == 8 ⇨ داده متناظر x=15

صدک شصت (شصت درصد) داده 15 یا کمتر از آن میباشد

نکته: در کران بالای هر طبقه عددی ملاحظه میشود که شمول این طبقه بر این داده نیست یعنی آخرین داده این طبقه کمی کمتر از همین داده است و این داده شامل طبقه بعدی است که در کران پایین طبقه بعدی ملاحظه میشود

توجه : عدد چارک دوم = عدد دهک پنجم = عدد صدک پنجاهم = میانه

☜ خاصیت میانه

اگر m میانه باشد و a یک عدد باشد

$$\sum|x_i-m| \le \sum|x_i-a|$$

5) مثال

تعدادی اتومبیل بشرح جدول ذیل از محل A به B وجود دارد میخواهیم یک پمپ بنزین ایجاد کنیم تا جهت سوختگیری اتومبیلها جمع کل مسافت برای کلیه اتومبیلها کمترین شود

فاصله(کیلومتر)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
اتومبیل(تعداد)	10	5	25	5	5

Xi	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
_fi	10	5	25	5	5
Fi	10	15	40	45	50
_i	1	2	3	4	5

$$Q=L_i+\frac{np-F_{i-1}}{f_i}*C$$

میانه وسط صف داده است

$$\frac{\sum f_i}{2}=\frac{5+10+20+5+10}{2}=25$$

در سطر Fi سلول مرتبط با 25 عدد 40 یعنی طبقه3 میباشد پس i=3 است. ضمنا میانه یعنی p=50% است و فاصله طبقات هم C=20 است

$$Q=40+\frac{50*\%50-15}{25}*20=48$$

بنابراین پمپ بنزین باید در 48 کیلومتری از A احداث شود

☜ مود در داده پیوسته

$$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) * C$$

که i همان طبقه ای است که بیشترین فراوانی را دارد و Li کران پایین همین طبقه است و C طول هر رده (تقریبا همان C فاصله طبقات) میباشد

$$d_1 = f_i - f_{i-1}$$
$$d_2 = f_i - f_{i+1}$$

6) مثال

در جدول زیر مود دقیقا چه عددی است

xiداده	6-9	9-12	3-6
fi	20	12	4

ابتدا داده ها مرتب میکنیم سپس ملاحظه میشود فاصله بین دو طبقه عدد 3 میباشد

xiداده	3-6	6-9	9-12
fi فراوانی	4	20	12
F	4	24	31

بیشترین فراوانی(مود) در طبقه 2 است پس i=2 بنابراین مود بین 6-9 است که برای بدست آوردن عدد دقیق

$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right) * C = 6 + \left(\frac{20-4}{20-4+20-12}\right) * 3 = 8$

بنابراین مود عدد 8 میباشد

نکته : در بعضی کتب در فرمول فوق بجای C حرف W میگذارند W=C-1 میباشد(که کمتر میشود)

تمرین: برای دادههای جدول زیر مد را بدست آورید.

حدود طبقات	f_i
1-4	8
4-7	6
7-10	13
10-13	16
13-16	7

مشخصه های پراکندگی :

1- دامنه تغییرات (تفاضل بزرگترین داده از کوچکترین داده)
2- انحراف متوسط (میانگین قدر مطلق انحراف ها از میانگین داده ها)
3- انحراف معیار (جذر واریانس که واریانس میانگین توان دوم انحراف ها از میانگین داده ها)

☜ فراوانی :

اگر n شـیء متمایز در دسته های مختلفی (.. , n1, n2) را به تعداد مختلف (..w1,w2) داشته باشیم w ها را فراوانی گویند

1- فراوانی نسبی نسبت فراوانی هر مجموعه به کل تعداد آن مجموعه ri=wi/n
2- فراوانی انباشته (تجمعی) حاصل جمع فراوانی تا موقعیت مورد نظر Fj
3- فراوانی انباشته نسبی : حاصل جمع Wi ها تقسیم بر n

☜ میانگین

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} x_h$$

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

☜ واریانس σ^2 انحراف معیار σ

$$v(x) = \sigma^2 = \frac{1}{n}(\sum (x_i - \mu)^2$$

یا

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n}$$

در حالت داشتن فراوانی

$$\mu = \frac{1}{\sum f_i}\sum_{i=1}^{n} x_i\, f_i$$

$$v(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\sum f_i}(\sum f_i (x_i - \mu)^2$$

ثابت شـده اسـت که در طبیعت آمار بصورت نرمال توزیع شده است که معمولاً 68٪ داده ها بین $\mu \pm \sigma$ و 96٪ داده ها بین $\mu \pm 2\sigma$ خواهد بود

7) مثال

برای داده های x_i و فراوانی f_i میانگین و واریانس را حساب کنید آیا این داده ها نرمال هستند

$$r_i = \frac{f_i}{\sum f_i} \qquad R_i = \sum r_i \qquad F_i = \sum f_i$$

	داده x_i	فراوانی f_i	$x_i f_i$	فراوانی نسبی r_i	فراوانی نسبی تجمعی R_i	فراوانی تجمعی F_i		
	10.4	1	10.4	0.02	0.02	1		
	11.3	6	67.8	0.12	0.14	7		
	12.2	7	85.4	0.14	0.28	14		
	13.1	12	157.2	0.24	0.52	26		
	14	12	168	0.24	0.76	38		
	14.9	9	134.1	0.18	0.94	47		
	15.8	3	47.4	0.06	1	50		
جمع		50	670.3	1				
			13.406			1.80547		
			میانگین			واریانس نمونه		

$s^2 = 1.805$

$s = 1.34$

$\mu \pm \sigma = 12.06 \quad 14.74$

$\mu \pm 2\sigma = 10.71 \quad 16.09$

$\mu \pm 3\sigma = 09.37 \quad 16.43$

داده بین اعداد	12.06-14.74	10.71-16.09	09.37-16.43
تعداد	31	49	50
درصد	31/50=62%	49/50=98%	50/50=100%

☜ میانگین در داده پیوسته

اگر دادههای ما پیوسته بود جمع کران بالا و پایین هر طبقه را بر 2 تقسیم نموده و این عدد بعنوان داده جدید(گسسته) با فراوانی مربوطه در نظر گرفته –حالا بصورت گسسته میانگین و انحراف معیار را بدست میاوریم.

8) مثال

میانگین این داده ها را بدست آورید

yi	fi
61-64	5
64-67	8
67-70	10
70-73	12
73-76	10
76-79	5

ابتدا دادها مرتب میکنیم که مرتب بوده است فاصله بین دو طبقه برابر است با 3=64-61 و در هر طبقه داده جدیدی Xi بدست میاوریم که نصف مجموع کران بالا و پایین است (مثلا (64+61)/2=62.5)

yi	fi	I	Xi	fi	Fi
61-64	5	1	62.5	5	5
64-67	8	2	65.5	8	13
67-70	10	3	68.5	10	23
70-73	12	4	71.5	12	35
73-76	10	5	74.5	10	45
76-79	5	6	77.5	5	50

حال میانگین این جدول جدید Xi را بدست میاوریم که در فرمولهای ذیل عددگذاری میکنیم

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{(62.5*5)+(65.5*8)+\cdots}{5+8+..} = 70.2$$

$$v(x) = \sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{(62.5-70.2)^2 * 5 + (65.5-70.2)^2 * 8 + \cdots.}{5+8+\cdots.}$$
$$= 19.47$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{19.47} = 4.41$$

میانگین 70.2 است که در طبقه i=4 میباشد

خواص میانگین حسابی

اگر داده های ما x_i باشد میانگین آنها $\bar{x}$ باشد آنگاه جمع داده ها با میانگین با توجه به فراوانی صفر میشود

$\sum(x_i-\bar{x})\,f_i=0$

اگر داده ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم میانگین هم با همین عدد ثابت جمع یا تفریق میشود

$y_i=x_i\pm a \;\Rightarrow\; \bar{y}=\bar{x}\pm a$

$y_i=x_i * a \;\Rightarrow\; \bar{y}=\bar{x} * a$

اگر y_i یکسری اعداد دیگر باشد

$z_i=x_i+y_i \;\Rightarrow\; \bar{z}=\bar{x}+\bar{y}$

9) مثال

قد تعدادی اشخاص بشرح ذیل است میانگین قد را بدست آورید

X	165	168	170	171	173
F	2	4	5	3	1

ضرب اعداد فوق در فراوانی ها وقت زیاد میبرد یک عدد در حدود وسط داده ها انتخاب میکنیم

اعداد جدول فوق از سایز عدد 170 کم کرده جدول زیر بدست میاید میانگین این جدول بدست آورده که ضرب و تقسیم آن ساده تر است بدست آورده و در انتها به میانگین عدد 170 اضافه میکنیم

Y	-5	-2	0	1	3
F	2	4	5	3	1

$\bar{y}=\frac{\sum y_i f_i}{\sum f_i}=\frac{(-5*2)+(-2*4)+\cdots}{2+4+\ldots}=\frac{-12}{15}=-0.8$

$\bar{x}=\bar{y}+170=-0.8+170=169.2$

خواص واریانس(پراش)

اگر داده های ما x_i باشد میانگین آنها $\bar{x}$ باشد آنگاه

اگر داده ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم واریانس و انحراف معیار تغییر نمیکند

$y_i=x_i\pm a \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\sigma_y=\sigma_x}$

10) مثال

قد تعدادی اشخاص بشرح ذیل است انحراف معیار قد را بدست آورید

X	165	168	170	171	173
F	2	4	5	3	1

ضرب اعداد فوق در فراوانی ها وقت زیاد میبرد یک عدد در حدود وسط داده ها انتخاب میکنیم

اعداد جدول فوق از سایز عدد 170 کم کرده جدول زیر بدست میاید میانگین و واریانس این جدول بدست آورده که ضرب و تقسیم آن ساده تر است بدست آورده و در انتها به میانگین عدد 170 اضافه میکنیم و واریانس فرق نمیکند

y	-5	-2	0	1	3
F	2	4	5	3	1

$\bar{y}=\frac{\sum y_i f_i}{\sum f_i}=\frac{(-5*2)+(-2*4)+\cdots}{2+4+\ldots}=\frac{-12}{15}=-0.8$ $\bar{x}=\bar{y}+170=-0.8+170=169.2$

$v(y)=\sigma_y{}^2=\frac{\sum(y-\bar{y})^2 f_i}{\sum f_i}=\frac{(-5-(-0.8))^2*2+(-2-(-0.8))^2*4+\cdots}{2+4+\cdots}=4.56$ $\sigma_y=\sqrt{4.56}=2.13$

$\sigma_x=\sigma_y=2.13$

** اگر داده ها را در یک عدد ضرب کنیم انحراف معیار با مجذور آن عدد نسبت معکوس دارد

$y_i = x_i * a \Rightarrow \boldsymbol{\sigma_y} = \left(\frac{1}{a^2}\right) * \boldsymbol{\sigma_x}$

☜ ** میانگین هندسی

در دادههایی که بر حسب در صد یا نسبت (مثلا متوسط رشد تولید) میباشند از این میانگین استفاده میشود

$G = \left(\prod x_i^{f_i}\right)^{1/n}$

11) مثال

در یک کارگاه تولیدی مدیر تولید تعویض میشود در سال اول تولید مساوی و برابر سال قبل میگردد و در سال دوم تولید دو برابر سال ما قبل میشود و در سال سوم تولید دو برابر سال ما قبل و در سال چهارم تولید چهار برابر سال ما قبل خود میشود . متوسط رشد تولید چند برابر شده است

$G=\sqrt{1 * 2 * 2 * 4} = \sqrt{16} = 4$

☜ **میانگین همساز (توافقی) (هارمونیک)

اگر داده صفر نباشد و مقیاس دادهها بصورت ترکیبی باشد مثلا کیلومتر بر ساعت – آنگاه میانگین هارمونیک کاربرد دارد

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}$$

12) مثال

اتومبیلی از A به B در سه فاصله مساوی با سرعتهای 75 و 80 و 95 کیلومتر بر ساعت طی میکند متوسط سرعت اتومبیل چقدر است

Xi	75	80	95
fi	1/3	1/3	1/3

$$H = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{75}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{80}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{95}}=82.51$$

13) مثال

اتومبیلی از A به B با سرعت 100 کیلومتر بر ساعت و در بازگشت یک چهارم مسیر با سرعت 80 کیلومتر بر ساعت و باقی مسیر را با سرعت 120 کیلومتر بر ساعت طی میکند متوسط سرعت اتومبیل چقدر است

Xi	100	80	120
Fi	1	1/4	¾

$$H = \frac{1+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{100}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{80}+\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{120}}=\frac{2}{0.01+0.003125+0.00625} = \frac{2}{0.019375} = 103.2258$$

14) مثال

نمرات 10 واحد درسی دانشجویی به شرح ذیل میباشد

10	16	15	12	18	نمره = x
2	1	2	4	1	تعداد(واحد) =f

الف) مد چه عددی است(چرا) – ب) میانه چه عددی است(چرا) ج) صدک 85 داده ها بدست آورید د)میانگین و واریانس و انحراف معیار را بدست آورید

حل: ابتدا داده ها مرتب میکنیم

X_i	10	12	15	16	18	
f_i	2	4	2	1	1	
Fi	2	6	8	9	10	

داد ها گسسته هستند زیرا بین داده ها پیوسته نیست

الف) مد داده با بیشترین تکرار که نمره 12 مود میباشد

ب) برای میانه باید وسط کل داده ها را پیدا کنیم جمع داده ها را بر 2 تقسیم کنیم(نصف 10 برابر 5میشود) و در ستون Fi دنبال خود این جواب و یا کران بالای آن میگردیم که Fi=5 نداریم و کران بالا عدد6 میشود و داده متناظر آن نمره 12 میانه میشود

$$n*p=(\sum f_i)*p=(2+4+2+1+1)*\left(\frac{1}{2}\right)=5$$
$$\to 5^{+} \to \frac{\text{در}}{F} \to \quad F=6 \to \frac{\text{در}}{x} \to \quad x=12$$

میانه 12 میباشد

ج)

$$n*p=(\sum f_i)*p=(2+4+2+1+1)*\left(\frac{85}{100}\right)=8.5$$
$$\to 8.5^{+} \to \frac{\text{در}}{F} \to \quad F=9 \to \frac{\text{در}}{x} \to \quad x=16$$

صدک 85 عدد 16 شد یعنی 85٪ دادها 16 یا کمتر از 16 میباشند

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}=\frac{(10*2)+(12*4)+(15*2)+(16*1)+(18*1)}{(2+4+2+1+1)}=13.2$$
$$\sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$
$$=\frac{(10-13.2)^2*2+(12-13.2)^2*4+(15-13.2)^2*2+(16-13.2)^2*1+(18-13.2)^2*1}{(2+4+2+1+1)}$$
$$=6.36=\sigma^2 \qquad \sigma=2.52$$

مثال15)

نمرات دانشجویان با داده‌های زیر را اعلام شده است. الف) میانه داده ها چه مقدار است؟ب- مد(نما) داده ها چه مقدار است. چرا-ج- صدک 15 داده‌های را معلوم کنید–د- میانگین و واریانس و انحراف معیار نمرات دانشجویان را بدست آورید

نمره = x	8-10	12-14	18-20	10-12	16-18	14-16
تعداد =f	1	2	1	1	1	4

*** حل : ابتدا جدول را مرتب نموده و فراوانی تجمعی را بدست میاوریم توجه شود این داده ها پیوسته هستند و تمام محاسبات برای پیوسته است - داده قدیم Xm نام میگذاریم و داده جدید x را که میانگین کران بالا و پایین هر طبقه است بدست میاوریم

نمره = Xm	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
تعداد =f	1	1	2	4	1	1
F	1	2	4	8	9	10
نمره = x	9	11	13	15	17	19

**** مد یا نما : همان داده ای است که بیشترین فراوانی(تعداد) را دارد که میشود 14-16 که بایستی دقیقا مشخص کنیم چه عددی بین 14-16 میباشد

$$M = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) * C = L_i + \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}\right) * C$$
$$= 14 + \frac{4-2}{(4-2)+(4-1)} * 2 = 14.8$$

*** میانه : میانه = وسط صف منظم داده که p=1/2

$$n * p = (\sum f_i) * p = (1+1+2+4+1+1) * \left(\frac{1}{2}\right) = 5$$
$$\rightarrow 5^+ \rightarrow \frac{\text{در}}{F} \rightarrow \quad F = 8 \quad \rightarrow \frac{\text{در}}{x_m} \rightarrow \quad x = 14 - 16$$

میانه عددی بین 14-16 است که برای تعیین دقیق آن

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C \qquad m = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C$$
$$= 14 + \frac{(1+1+2+4+1+1) * \left(\frac{1}{2}\right) - 4}{4} * 2 =$$
$$m = 14 + \left(\frac{5-4}{4}\right) * 2 = 14.5$$

*** صدک 15

$$n * p = (\sum f_i) * p = (1+1+2+4+1+1) * \left(\frac{15}{100}\right) = 1.5$$
$$\rightarrow 1.5^+ \rightarrow \frac{\text{در}}{F} \rightarrow \quad F = 2 \quad \rightarrow \frac{\text{در}}{x_m} \rightarrow \quad x = 10 - 12$$

برای محاسبه دقیق صدک 15

$$Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C \qquad Q = L_i + \frac{np - F_{i-1}}{f_i} * C$$
$$= 10 + \frac{(1+1+2+4+1+1) * \left(\frac{15}{100}\right) - 1}{1} * 2 =$$
$$Q = 10 + \frac{1.5 - 1}{1} * 2 = 11$$

*** میانگین با Xn

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i*f_i}{\sum f_i}=\frac{(9*1)+(11*1)+(13*2)+(15*4)+(17*1)+(19*1)}{1+1+2+4+1+1}=\frac{142}{10}=14.2$$

*** واریانس

$$\sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2*f_i}{\sum f_i}=\frac{(9-14.2)^2*1+(11-14.2)^2*1+(13-14.2)^2*2+(15-14.2)^2*4+(17-14.2)^2*1+(19-14.2)^2*1}{1+1+2+4+1+1}$$

$$\sigma^2=7.36$$

*** انحراف معیار

$$\sigma=\sqrt{7.36}=2.71$$

رگرسیون و همبستگی خطی

n تا زوج مرتب داریم بهترین رابطه خطی بین دو متغیر زوج پیدا کنیم

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad , \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \Rightarrow y = a + bx$$

در رگرسیون باید ببینیم متغیر مستقل کدام است مثلاً اگر جدولی از طول قامت پدران و پسرانشان داشته باشیم متغیر مستقل پدر است زیرا بتبع قامت پدر قامت پسر تغییر میکند

بعبارت دیگر آن بخشی از داده که نداریم و مجهول است y نام میگذاریم

نکته مهم : در رابطه فوق در مخرج باید متغیر مستقل باشد

16) مثال

معادله رگرسیون بر حسب y برای زوجهای مرتب زیر بدست آورید

x = 1,3,4,6,8,9,11,14
y = 1,2,4,4,5,7,8,9
y = a+bx
b = 7/11
a = 5-(7/11)*7=6/11
y = 6/11+(7/11)x

اگر بخواهیم معادله خط رگرسیون x بدست آوریم در تمام مخرج رابطه فوق (رابطه b) بجای x میتوان y قرار داد

x = a+by
a = -0.5
b = 1.5
x = -0.5+1.5y

17) مثال

در جدول زیر بر حسب اینچ طول قد پدر و پسر ملاحظه میکنید . معادله خط رگرسیون را بنویسید؟ اگر قامت پدری 75 شد پیش بینی میکنید فرزند او دارای چه قدی باشد؟

پدر	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
پسر	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

حل :

پدر را X و پسر را Y مینامیم زیرا قد پسر از پدر تبعیت میکند پس پدر متغیر مستقل است

$\sum x_i = 65+63+.....+71 = 800$ $\sum y_i = 68+66+.....+70 = 811$

$\sum x_i^2 = 65^2+63^2+.....+71^2 = 53418$ $\sum x_i y_i = 65*68+63*66+....+71*70 = 54107$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{54107 - \frac{800*811}{12}}{53418 - \frac{(800)^2}{12}} = 0.476 \quad , \bar{x} = 800/12 \quad \bar{y} = 811/12$$

$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad a = (811/12) - (0.476)(800/12) = 35.85 \Rightarrow$

$y = a + bx$

$$y = 35.85 + 0.476x$$

$y = 35.85 + (0.476*75) = 71.55$

18)

مصرف یک دارو در سه سال گذشته مقادیر زیر بوده در سالهای بعد پیش بینی نمایید

سال = x	93	94	95	96	97
مصرف =y	1	2	4	؟	؟

*** حل : ابتدا در جدول مقادیر x قدیمی را Xm نام گذاشته و آنرا را تغییر میدهیم مثلا همه را از 94 کم میکنیم

سال = Xm	93	94	95
x	-1	0	+1
مصرف =y	1	2	4

$y = a + bx$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i * \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{(-1*1)+(0*2)+(1*4) - \frac{(-1+0+1)(1+2+4)}{3}}{((-1)^2+(0)^2+(1)^2) - \frac{(-1+0+1)^2}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-1+0+1}{3} = 0 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2.33$$

$\bar{y} = a + b\bar{x} \qquad 2.33 = a + (1.5*0) \qquad a = 2.33$

$$y = 2.33 + 1.5x$$

$Xm = 96 \rightarrow x = 96 - 94 = 2 \rightarrow y = 2.33 + (1.5*2) = 5.33$

$Xm = 97 \rightarrow x = 97 - 94 = 3 \rightarrow y = 2.33 + (1.5*3) = 6.83$

19) مثال

در جدول زیر طول قد لوبیا (به سانتیمتر) بر حسب سن (به هفته) ملاحظه میکنید

معادله خط رگرسیون را بنویسید؟

اگر هفته دهم شد پیش بینی میکنید طول لوبیا دارای چه قدی باشد؟

سن	1	2	3	4	5	6	7			10		
طول	5	13	16	23	33	38	40			????		

حل :

سن را X و طول را Y مینامیم زیرا طول از سن تبعیت میکند پس سن متغیر مستقل است

$\sum x_i = 1+2+.....+7 = 28$ $\qquad$ $\sum y_i = 5+13+.....+40 = 168$

$\sum x_i^2 = 1^2+2^2+.....+7^2 = 140$ $\qquad$ $\sum x_i y_i = 1*5+2*13+....+7*40 = 844$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{844 - \frac{28*168}{7}}{140 - \frac{(28)^2}{7}} = 6.143 \quad , \bar{x} = 28/7 \quad \bar{y} = 168/7$$

$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad a = (168/7) - (6.143)(28/7) = -0.572 \Rightarrow$

$y = a + bx$

$$y = -0.572 + 6.143x$$

$y = -0.572 + (6.143*10) = 60.85$

تمرین :

طی آماری طول قامت 50 کودک بشرح ذیل است

70(6)	75(9)	80(5)	85(7)	90(4)	95(7)
100(2)	105(2)	115(6)	120(1)	125(1)	

میانگین و واریانس و انحراف معیار را حساب کنید

شمارش - ترتیب و ترکیب:

شمارش

اصل جمع : اگر عمل A به n طریق و عمل B به m طریق بتوان انجام داد
چنانچه عمل L منوط به انجام عمل A یا عمل B باشد
در اینصورت تعداد طرق انجام عمل L عبارت است از
$n+m$

اصل ضرب : اگر عمل A به n طریق و عمل B به m طریق بتوان انجام داد
چنانچه عمل L منوط به انجام عمل A و عمل B توام باشد
در اینصورت تعداد طرق انجام عمل L عبارت است از
$n*m$

20) مثال

از منزل تا محل کار با پنج اتوبوس و سه مینی بوس و دو تاکسی میتوان رفت به چند طریق میتوان به مقصد رسید
$5+3+2=10$

21) مثال

از منزل تا محل دو ایستگاه است تا ایستگاه اول با پنج اتوبوس و از ایستگاه اول تا محل کار با سه مینی بوس میتوان رفت به چند طریق میتوان به مقصد رسید

$5*3=15$

22) مثال

از بین 4 قاضی و 6 دبیر و 3 بازرگان میخواهیم کمیته 2 نفری با مشاغل مختلف تشکیل دهیم به چند طریق میشود

$4*6+4*3+6*3=54$ دبیر و بازرگان + قاضی و بازرگان + قاضی و دبیر

$$\binom{4}{1}\binom{6}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{6}{1}\binom{3}{1}$$

تمرین

در یک شهر شرکت مخابرات شماره های تلفن همراه یازده رقمی که رقم سمت چپ آنها با 0911711و 0913713و0911715 شروع شود میتواند سرویس بدهد - کل تلفنهایی که میتواند واگذار شود چقدر است.

ترتیب

ترتیب n شئ (ترتیب انتخاب n شئ از بین n شئ) = $n!$ (مثلاً با سه رقم متفاوت چند عدد سه رقمی)

تعداد ترتیب k شئ از بین n شئ = $P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}$ (مثلاً با سه رقم متفاوت چند عدد دو رقمی)

ترکیب

در ترکیب ترتیب اهمیت ندارد

تعداد ترکیب k شئ از بین n شئ $\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} =$

(مثلاً انتخاب سه محصول ازبین 10 محصول) $C_k^n = \binom{10}{3} = C_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = 120$

تعداد ترکیب n شئ (ترکیب انتخاب n شئ از بین n شئ) $C_n^n = C_1^1 = 1$

اگر n شئ داشته باشیم n1 تا از نوع اول و n2 تا از نوع دوم و .... باشد آنگاه تعداد ترتیب

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$$

اگر n شئ داشته باشیم که در یک محیط دایره قرار گرفته باشند تعداد ترتیب

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

اگر k شئ از بین n شئ بخواهیم بخواهیم انتخاب کنیم چون ترتیب در این حالت مهم نیست ترکیب گویند

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

23) مثال

- n شئ از بین n شئ انتخاب کنید

$$C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1$$

24) مثال

- به چند طریق میتوان دو شئ را از بین سه شئ انتخاب کرد

اگر ترتیب مهم باشد

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!}$$

اگر ترتیب مهم نباشد

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

25) مثال

به چند طریق میتوان سه شئ را از بین سه شئ انتخاب کرد

اگر ترتیب مهم باشد

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = 6$$

اگر ترتیب مهم نباشد

$$= \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1 \quad C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

26) مثال

چند عدد دو رقمی با ارقام 9 و 8 و 6 و 2 و 1 میتوان نوشت

یکان دهگان

5 4 بدون تکرار ارقام = 4*5=20

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

روش دوم

چون ترتیب مهم است

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 4*5 = 20$$

27) مثال

چند عدد زوج سه رقمی با ارقام 8 و 5و 6 و 1 و 2 بدون تکرار ارقام میتوان نوشت

بدون تکرار

روش اول - تعداد حالاتی که در یک موقعیت میتوان ارقام را بدون تکرار داشت

یکان دهگان صدگان

3 4 3

بدون تکرار 36=3*4*3

روش دوم - کل اعداد سه رقمی که با پنج رقم میتوان نوشت

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

کل اعداد دو رقمی که با چها رقم میتوان نوشت (یعنی کلیه سه رقمی های دارای سمت راست رقم فرد 5)

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

کل اعداد دو رقمی که با چها رقم میتوان نوشت (یعنی کلیه سه رقمی های دارای سمت راست رقم فرد 1)

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

بنابراین کل اعداد زوج سه رقمی از پنج رقم

60-12-12=36

با تکرار ارقام

تعداد حالاتی که در یک موقعیت میتوان ارقام را با تکرار داشت

یکان دهگان صدگان

3 5 5

با تکرار 75=3*5*5

28) مثال

نمرات کلاسی بصورت P و F است بیست نفر نمره P گرفته اند به چند طریق دو نفر میتوان از بین آنها انتخاب کرد که نمره P گرفته باشند

$$C_k^n = \frac{20!}{(20-2)!2!}$$

مثال 29)

بیست نفر در یک کلاس نمره های مختلفی گرفته اند دو نفر چگونه میتوان از بین آنها انتخاب کرد
در این حالت ترتیب مهم است

$$P_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!}$$

مثال 30)

تعداد 10 نفر دور میز دایره ای به چند طریق امکان نشستن دارند

(n-1)!=(10-1) !

مثال 31)

5 لامپ سبز و 2 لامپ زرد و 3 لامپ قرمز داریم به چند طریق میتوان ده عدد سر پیچ مشخص را روی لامپها نصب کرد

اول سبز   دوم زرد   سوم قرمز

$$\binom{10}{5}\binom{10-5}{2}\binom{10-5-2}{3}$$

مثال 32)

4 کتاب ریاضی و 3 کتاب شیمی و 2 کتاب تاریخ و یک کتاب زبان (همه متفاوت) داریم این ده عدد کتاب را میخواهیم در قفسه مرتب کنیم بطوریکه کتابهای ریاضی کنارهم و کتابهای تاریخ کنارهم و ..... باشد
کل حالاتی که 4 کتاب ریاضی میتواند کنار هم باشد = !4 و کل حالاتی که 2 کتاب تاریخ میتواند کنار هم باشد = !2 و ....
و چهار گروه ریاضی و شیمی و تاریخ و زبان میتواند کنار هم قرار گیرد !4
بنابراین کل حالات

4! * (4 ! * 3! * 2! * 1!)

مثال 33)

شخصی به یک اتاق با شش صندلی که در یک ردیف هستند وارد میشود پنج نفر از دوستانش متعاقبا وارد میشوند به چند طریق این پنج نفر کنار آن شخص قرار میگیرند
خود شخص به شش حالت روی صندلی ها قرار میگیرد پنج نفر هم بصورت !5 میتوانند کنار او بنشینند پس
6*5!=6!

مثال 34)

4 کتاب ریاضی و 3 کتاب شیمی (مشخص) داریم به چند طریق میتوان 3 کتاب را داشت که 2 تا ریاضی و یکی شیمی در آن باشد

$$\binom{3}{1}\binom{4}{2}$$

مثال 35)

به چند طریق میتوان یک کمیته 3 نفری شـامل 2 پزشک عمومی و یک چشم پزشک از بین 4 پزشک عمومی و 3 چشم پزشک داشت

$\binom{3}{1}\binom{4}{2}$

مثال 36)

به چند طریق میتوان از بین 5 خانم و 7 آقا کمیته ای شامل 2 خانم و 3 آقا داشت

$\binom{5}{2}\binom{7}{3}$

مثال 37)

به چند طریق میتوان از بین 5 خانم و 7 آقا کمیته ای شامل 2 خانم و 3 آقا داشت ولی چون 2 آقای مشخص با هم اختلاف دارند نباید باهم باشند

راه اول – هفت آقا را به 5 آقای بدون مشکل G_1 و دو آقای مشکل‌دار G_2 تفکیک میکنیم که دو حالت مطلوب را با هم جمع میکنیم (خانم L=Lady آقا G=Gentelman)

$$\overset{L}{\binom{5}{2}}\overset{G_1}{\binom{5}{3}}\overset{G_2}{\binom{2}{0}} + \overset{L}{\binom{5}{2}}\overset{G_1}{\binom{5}{2}}\overset{G_2}{\binom{2}{1}}$$

راه دوم) تعدادحالات کمیته سه نفره آقایان که آن دو نفر نباشند $A=\binom{2}{0}\binom{5}{3}$

تعدادحالات کمیته سه نفره آقایان که یکی از آن دو نفر باشد $B=\binom{2}{1}\binom{5}{3}$

تعداد حالات کمیته دو نفره از بین 5 خانم $C=\binom{5}{2}$

تعداد کل حالت مورد نظر $= (A + B) * C$

38) مثال

معادله x1+x2+x3+ +xk=n الف –چند جواب صحیح مثبت دارد ب - چند جواب مثبت و صفر دارد

حالت اول - ابتدا بصورت زیر در نظر میگیریم

x1+x2+x3=8

مثل این است که بگوییم دو چوب خط چگونه بین 8 گو میتوان قرار داد

000 | 000 | 00 $\Rightarrow$

کل تعداد حالات

$\binom{n-1}{k-1}$ =جواب صحیح تعداد= $\binom{8-1}{3-1} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = 21$

برای وقتی جواب صفر هم مد نظر باشد به دو طرف معادله اصلی به تعداد k تا عدد یک اضافه میکنیم

(x1+1)+(x2+1)+ .....+ (xk+1)=n+1+1.....1

y1+ y2 + ... yk = n+k

حال مثل حالت اول حل میشود

$\binom{n+k-1}{k-1}$ تعداد جواب صحیح و صفر= $\binom{8+3-1}{3-1} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45$

39) مثال

چهار پروژه داریم و میتوانیم روی هر کدام مضارب صحیح از هزار تومان خرج کنیم

الف - تعداد حالات که بخواهیم 20 هزار تومان را مصرف کنیم (هیچ پروژه ای بدون هزینه نیست)

ب - تعداد حالات که مقداری از 20 هزار تومان را خرج کنیم

حالت الف -

x1+x2+x3+x4= 20

$\binom{20-1}{4-1}$

حالت ب - مضارب صحیح و صفر مد نظر است (پروژه با هزینه صفر هم قبول است)

x1+x2+x3+x4 <= 20

$\binom{20+4-1}{4-1}$

----

40)

به چند طریق میتوان ار بین 7 نفر 3 نفر انتخاب کرد

$$C_3^7 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{4! * 5 * 6 * 7}{3! * 4!} = 35$$

41)

به چند طریق میتوان از بین 7 نفر 3 نفر انتخاب کرد که یکی رئیس یکی معاون یکی مدیر شود

$$P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{4! * 5 * 6 * 7}{4!} = 210$$

☜ احتمالات

تعداد کل حالات مطلوب تقسیم بر تعداد کل حالات ممکن

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالات خواسته شده}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

❊ همیشه احتمال بین صفر و یک است ❊

☜

☜ تعداد حالات

اگر n سکه را یکبار یا یک سکه را n بار پرتاب کنیم تعداد کل اعضای فضای نمونه عبارت است از 2^n

اگر n تاس را یکبار یا یک تاس را n بار پرتاب کنیم تعداد کل اعضای فضای نمونه عبارت است از 6^n

42) مثال

سکه ای دوبار پرتاب میکنیم احتمال حداقل یک شیر آمدن چقدر است

S= { HH , HT , TH , TT } فضای کلی

¼ ¼ ¼ ¼ احتمال هر حالت

A= { HH,HT,TH } فضای مورد نظر

P(A)=3/4 احتمال

X تعداد شیر	0	1	2
P=f(x) احتمال شیر	1/4	2/4	1/4

43) مثال

تاسی ناریب که احتمال عدد زوج آن دو برابر فرد است داریم با یک بار پرتاب احتمال اینکه عدد کمتر از 4 بیاید چقدر است

S = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }
w 2w w 2w w 2w

w+2w+w+2w+w+2w=1

9w=1 w = 1/9

S = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }
1/9 2/9 1/9 2/9 1/9 2/9

A = { 1 , 2 , 3 }
1/9 2/9 1/9

P(A) = 1/9+2/9+1/9=4/9

44) مثال

در یک 11 توپ داریم ظرف 6 توپ سفید و 5 توپ سیاه ، دو توپ را بدون جایگزینی بیرون میاوریم

الف)احتمال اینکه یکی سفید و یکی سیاه باشد چقدر است ؟.

ب) احتمال اولی سفید دومی سیاه

حل الف) بدون جایگزینی و بدون ترتیب

روش اول

تعداد کل حالات ممکن

تعداد کل حالات دو توپ = 11 * 10 = 110   حالت توپ دوم =10   حالت توپ اول = 11

تعداد کل حالات مطلوب

اولی سیاه   دومی سفید = 5 * 6 = 30

اولی سفید   دومی سیاه = 6 * 5 = 30

30+ 30 = 60

احتمال مورد نظر P (A) = 60 / 110

روش دوم از ترکیب

$$\frac{\text{مطلوب}}{\text{ممکن}} = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{60}{110}$$

حل ب) بدون جایگزینی و با ترتیب

روش اول

P(wb)=P(w1).P(w1b2)=6/11*5/10=30/110

روش دوم با منفک کردن دو وضعیت و استفاده از ترکیب

$$\frac{\binom{5}{0}\binom{6}{1}}{\binom{11}{1}} \cdot \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{0}}{\binom{10}{1}} = \frac{30}{110}$$

*** ترکیب همیشه بدون جایگزینی است ***

45) مثال

بیست نفر داریم احتمال اینکه حداقل دو نفر روز تولد یکسان داشته باشند چقدر است

تعداد کل فضا = 365 * 365... * 365 = (365) ^ 20

احتمال تولد روزهای مختلف = 365 * 364 * 363... * 346

P(A)= (365 * 364 * 363 ....* 346) / (365^20)= 0.5886

P(B) = 1-P(A)=0.4114

خواص احتمال

اگر S کل فضا و E فضای خواسته شده باشد و P احتمال باشد

$$0 \le P(E) \le 1$$
$$P(S) = 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(E) = 1$$

برای دو پیش آمد E و F میتوان نوشت

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ ***1*(توجه)در یک موضوع برای هر دو پیشامد وابسته و مستقل**

$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F)$ ***2*(توجه)در یک موضوع برای دو پیشامد وابسته به هم**

$$P(E - F) = P(E) - P(E \cap F)$$
$$P(E) = 1 - P(E')$$

(رخ ندادن E را E' مینامیم)

در قوانین مجموعه ها داریم که در احتمال هم بهمین صورت است

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

احتمال شرطی

قبلا گفتیم اگر کل تعداد حالات S و تعداد حالات خواسته شده E باشد آنگاه

$$P(E) = \frac{E}{S}$$

اگر F یک پیش آمد باشد و اگر E یک پیش آمد باشد حال احتمال E به شرط رخداد F عبارتست از

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad ; \quad P(F)>0$$

از فرمول فوق میتوان گفت که احتمال اینکه پیش آمد E و پیش آمد F رخ دهد ($\cap$ = **و**)عبارتست از

$$P(E \cap F) = P(F).P(E|F) = P(E).P(F|E)$$

احتمال شرطی دو پیش آمد مستقل

اگر دو پیش آمد مستقل از هم بودند (مستقل از هم یعنی $A \cap B = \{\ \} = \emptyset$)

احتمال رخداد اولی یا دومی($\cup$ = **یا**):

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

اگر دو پش آمد E و F مستقل باشند

$$P(F|E) = P(F)$$

بنابراین به این فرمول مهم برای احتمال توام دو پیش آمد مستقل میرسیم

اگر دو پش آمد E و F مستقل باشند احتمال هر دو رخداد با هم ($\cap$ = **و**):

$P(E \cap F) = P(F) * P(E)$ ***3*(توجه)در یک موضوع برای دو پیشامد مستقل از هم**

اگر چندین پیش آمد مستقل از هم در یک موضوع باشد آنگاه احتمال چند پیش آمد

$$P(E_i) = \sum P(E_i) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \cdots.$$

$P(E_i) = \sum P(E_i) * P(A|E_i) = P(E_1) * P(A|E_1) + P(E_2) * P(A|E_2) + P(E_3) * P(A|E_3)$ ... مخرج کسر بیز

46) مثال

تاسی را پرتاب میکنیم احتمال اینکه عدد فرد ;کمتر از4 یا عدد زوج بیاید چقدر است

اگر S کل حالات و E عدد زوج و F عدد فرد کمتر از 4 باشد

S={1,2,3,4,5,6 }　　　E={2,4,6}　　　F={1,3}

$P(C) = \frac{\text{تعداد حالات خواسته شده}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{C}{S}$

$P(E) = \frac{3}{6}$　　$P(E) = \frac{2}{6}$

این دو پیش آمد از هم مستقل هستند پس

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \left(\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

47) مثال

تاسی را پرتاب میکنیم احتمال اینکه عدد زوج باشد یا کمتر از 5 باشد چقدر است

اگر S کل حالات و E عدد زوج و F عدد کمتر از 5 باشد

S={1,2,3,4,5,6,7}　　　E={2,4,6}　　　F={1,2,3,4}　　$E \cap F = \{2,4\}$

$P(C) = \frac{\text{تعداد حالات خواسته شده}}{\text{تعداد کل حالات}}$

$P(E) = \frac{3}{6}$　　$P(F) = \frac{4}{6}$　　$P(E \cap F) = \frac{2}{6}$

این دو پیش آمد از هم مستقل نیستند (بهم وابسته اند) پس

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \left(\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{4}{6}\right) - \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

48) مثال

ثابت کنید برای سه پیش آمد که مستقل از هم نباشند و بخواهیم احتمال سه پیش آمد با هم را حساب کنیم

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P\big(A \cup (B \cup C)\big) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cup B \cup C) \end{aligned}$$

49)

در پرتاب دو تاس اگر جمع اعداد بزرگتر یا مساوی 10 شود احتمال اینکه هر دو عدد مساوی باشد

روش اول : S1 برای اینکه دو تاس جمع بزرگتر یا مساوی 10 و A مساوی بودن اعداد در بین S1

S1={46,55,56,64,65,66}

A={55,66}

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

روش دوم :S کلیه حالات دو تاس – S1 برای اینکه دو تاس جمع بزرگتر یا مساوی 10 - S2 برای مساوی بودن و A مساوی بودن اعداد در S1

S={11,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,26,31,32,33,34,35,36,41,42,43,44,45,46,
51,52,53,54,55,56,61,62,63,64,65,66}

S1={46,55,56,64,65,66}

S2={11,22,33,44,55,66}

$A = S1 \cap S2 = \{55,66\}$

$P(S1|S2) = \frac{P(S1 \cap S2)}{P(S2)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

50)

تاسی پرتاب میکنیم کمتر از 4 آمد احتمال اینکه فرد باشد

روش اول:

A={1,2,3} کمتر 4 B={1,3} فرد در A

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

روش دوم:

S={1,2,3,4,5,6} A={1,2,3} کمتر 4 B={1,3,5} فرد در کل

$P(B \cap A) = \{1,3\}$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{2}{3}$$

51) مثال

احتمال پنچر شدن لاستیک سمت راست یک خودرو 0.24 احتمال پنجر شدن است و احتمال پنچر شدن لاستیک سمت چپ 0.20 است و احتمال اینکه هر دو لاستیک باهم پنچر شود 0.08 میباشد احتمال اینکه بنزین در باک تمام شود 0.02 است

الف) احتمال پنجر شدن لاستیک راست یا چپ چقدر است. ب) احتمال اینکه اصلا پنچر نشود چقدر است

ج) احتمال اینکه لاستیک چپ پنچر یا بنزین تمام شود چقدر است

د) احتمال اینکه لاستیک چپ پنچر و بنزین تمام شود چقدر است

حل: قبلا نوشته شد که

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ ***(توجه)در به یک موضوع برای هر دو پیشامد وابسته به هم***

$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F)$ ***(توجه))در به یک موضوع برای دو پیشامد وابسته به هم***

$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ ***(توجه))در به یک موضوع برای هر دو پیشامد مستقل از هم***

$P(E \cap F) = P(F) * P(E)$ ***(توجه))در به یک موضوع برای دو پیشامد مستقل از هم***

الف احتمال اینکه چپ یا راست پنچر شود

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$=0.24+0.20-0.08=0.36

ب) احتمال اینکه پنچر نشود عبارتست از

$P(K \cup L) = P(K) + P(L) - P(K \cap L)$=(1-0.24)+(1-0.20)-(1-0.08)=0.64

ج) بنزین و پنچری دو پیشامد مستقل هستند احتمال چپ پنچر یا بنزین تمام شود

$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(E \cap F) = 0.20 + 0.02 - 0 = 0.22$

د) احتمال چپ پنچر و بنزین تمام شود چون بهم پنچری و بنزین بهم ربطی ندارد مستقل هستند

$$P(F \cap B) = P(E) * P(F) = 0.20 * 0.02 = 0.0040$$

52) مثال:

فروشگاهی سه نوع لامپ از سه کارخانه میخرد بطوریکه 50٪ نیازش از کارخانه اول و 20٪ از کارخانه دوم و 30٪ از کارخانه سوم تامین میشود. از سوابق این کارخانه ها مشخص شده که از کل لامپهای تولیدی هر کارخانه، بترتیب کارخانه اول 1٪ لامپها معیوب و کارخانه دوم 4٪ معیوب و کارخانه سوم 6٪ معیوب میباشد. این فروشگاه از لامپهای موجود در انبارش یک لامپ بتصادف انتخاب میکند.

احتمال اینکه این لامپ معیوب باشد؟

کارخانه	Tدرصد خرید	Kدر صد معیوب
R	.5	.01
S	.2	.04
T	.3	.06

کل احتمال معیوب بودن،

$$\sum P(E_i)P(A|E_i) =$$

اگر K معیوب بودن و سه کارخانه را R,S,T بنامیم

پس احتمال معیوب بودن معادل با احتمال معیوب بودن هرکارخانه و میزان خرید آن کارخانه میشود

در زیر مفهوم $P(R|K)$ این است که اگر در انبار شرکت لامپ خراب باشد احتمال از کارخانه R برابر با 0.5 میباشد یعنی

$P(R|K) = P(R) = 0.5$ و در این کارخانه میزان معیوب $P(K) = P(K_R) = 0.01$

$P(K) = P(K|R,S,T) = P(K)P(R|K) + P(K)P(S|K) + P(K)P(T|K)$

$P(K) = (0.01 * 0.5) + (0.04 * 0.2) + (0.06 * 0.3)$ =0.031

53) مثال

تاس همگنی که روی آن اعداد 1 تا 6 نوشته شده پرتاب میکنیم ملاحظه شد زوج آمد احتمال اینکه عدد ظاهر شده بر 1.5 بخش پذیر باشد چقدر است

کل حالات S – ظهور زوج A – بخش پذیری 1.5 B نام میگذاریم

S={1,2,3,4,5,6}   A={2,4,6}   B={3,6} $P(A \cap B) = \{6\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

میشد از طریق قضیه بیز نیز حل کنیم

54) مثال

در جعبه آبی رنگی شش گوی با شماره گذاری 1 تا 6 داریم و در جعبه قرمز رنگی نیز 4 گوی با شماره 7 تا 10 داریم یکی از دو جعبه بتصادف انتخاب میکنیم و یک گو بیرون میاوریم اگر جعبه انتخابی آبی باشد احتمال اینکه عدد روی گوی بر 3 بخش پذیر باشد چقدر است

کل حالات S – ظهور مهره های آبی A – بخش پذیری 3 را B نام میگذاریم

S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 }   A={1,2,3,4,5,6}   B={3,6,9} $P(A \cap B) = \{3,6\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{2}{6}$$

55) مثال

جعبه ای 21 لامپ دارد که 4 لامپ آنها سوخته است از این جعبه همزمان دو لامپ **بدون** عمل جایگذاری انتخاب میکنیم احتمال اینکه هر دو لامپ سوخته باشد چقدر است

از طریق ترکیب

$$P=\frac{\binom{17}{0}\binom{4}{2}}{\binom{21}{2}}=\frac{6}{210}$$

56) مثال

جعبه ای 21 لامپ دارد که 4 لامپ آنها سوخته است از این جعبه یکی یکی دو لامپ **بدون** عمل جایگذاری انتخاب میکنیم احتمال اینکه هر دو لامپ سوخته باشد چقدر است

اگر B1 پیشامد لامپ سوخته در برداشت اول و B2 پیشامد لامپ سوخته دوم در دومین برداشت باشد

اگر بخواهیم لامپ اول و لامپ دوم سـوخته باشد چون لامپ اول پس از برداشتن به ظرف باز نگشته است لامپ دوم وابسته به لامپ اول است آنگاه

$$P(B1\cap B2)=P(B1)*P(B2|B1)=\frac{4}{21}*\frac{3}{20}=\frac{1}{35}$$

میشد با منفک کردن دو وضعیت از طریق ترکیب هم رفت

$$P=\frac{\binom{17}{0}\binom{4}{1}}{\binom{21}{1}}*\frac{\binom{17}{0}\binom{3}{1}}{\binom{20}{1}}=\frac{4}{21}*\frac{3}{20}$$

جواب این مثال با مثال قبلی استثنائا مساوی شد علت هم این است گه هر دو سوخته انتخاب کردیم اولی سوخته و دومی سوخته یعنی دیگر ترتیب ندارد که اگر اولی سوخته و دومی سالم بود ترتیب مهم میشد و در اینصورت جواب مثال قبل .با این مثال فرق میداشت (به مثال 39 در خصوص 11 توپ رجوع شود)

----

57) مثال

جعبه ای 21 لامپ دارد که 4 لامپ آنها سوخته است از این جعبه یک به یک دو لامپ **با** عمل جای گذاری انتخاب میکنیم احتمال اینکه هر دو لامپ سوخته باشد چقدر است

اگر B1 پیشامد لامپ سوخته در برداشت اول و B2 پیشامد لامپ سوخته دوم در دومین برداشت باشد

اگر بخواهیم لامپ اول و لامپ دوم سـوخته باشـد چون لامپ اول به ظرف بازگشـته است پس لامپ دوم ارتباطی با لامپ اول ندارد آنگاه

$$P(B1\cap B2)=P(B1)*P(B2)=\frac{4}{21}*\frac{4}{21}$$

میشد با منفک کردن دو وضعیت از طریق ترکیب هم رفت

$$P=\frac{\binom{17}{0}\binom{4}{1}}{\binom{21}{1}}*\frac{\binom{17}{0}\binom{4}{1}}{\binom{21}{1}}=\frac{4}{21}*\frac{4}{21}$$

58) مثال

مطابق جدول900 نفر داریم یک فرد انتخاب میکنیم متوجه میشویم که استخدامی است احتمال مرد بودن چقدر است

	مستخدم	بیکار	
مرد	460	40	500
زن	140	260	400
	600	300	900

$$P(M \downarrow E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{460/900}{600/900} = 460/600$$

در مبحث بعدی مشاهده میکنیم این مسئله از طریق بیز هم قابل حل است

59) مثال

در جعبه ای 20 فیوز داریم و میدانیم که 5 عدد از آنها خراب است دو فیوز انتخاب میکنیم احتمال هر دو خراب چقدر است؟

روش اول

$$P(A \cap B) = P (A) . P (B) = (5/20) . (4 / 19)$$

روش دوم

$$P = \frac{\binom{5}{1}\binom{15}{0}}{\binom{20}{1}} * \frac{\binom{4}{1}\binom{15}{0}}{\binom{19}{1}}$$

ضمنا چون هر دو فیوز خراب انتخاب کردیم ترتیب خرابی مهم نیست میشود از این ترکیب هم میتوان استفاده کرد

$$P(Z) = \frac{\binom{15}{0}\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}}$$

قضیه بیز

اگر بتعداد Ei پیش آمد مستقل داشته باشیم اگر A یک پیش آمد دلخواه باشد

$$P(E_r \mid A) = \frac{P(E_r)P(A|E_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A|E_i)}$$

در فرمول فوق P(Er|A) همان خواسته مسئله است و P(Er) همان احتمال ذکر شده در مسئله است و P(A|Er) طبق محاسبه شرح مسئله است

مهم : در حل مسائل A همان وضعیتی است که در مسئله رخ داده است و Er همان خواسته مسئله است

60) مثال

70 در صد دانشجویان مرتب و 30 در صد نا مرتب هستند دانشجوی مرتب 90٪ احتمال موفقیت و دانشجوی نا مرتب 40 در صد احتمال موفقیت دارند یک دانشجو بتصادف انتخاب میکنیم ملاحظه شد قبول شده احتمال مرتب بودن او چقدر است .

A=موفق

B1=مرتب

B2=نا مرتب

$$P(B1 \downarrow A) = \frac{P(B1).P(A\downarrow B1)}{P(B1).P(A\downarrow B1) + P(B2).P(A\downarrow B2)}$$

$$\frac{0.7*0.9}{0.7*0.9+0.3*0.4} = \frac{63}{75}$$

61) مثال

شخصی سکه‌ای در دست دارد که 70٪ حدس میزنیم معیوب باشد بطوریکه شیرآمدن سکه بیشتر از خط باشد سکه را پرتاب میکند ملاحظه میشود شیرآمده است احتمال معیوب بودن سکه چقدر میشود؟

A=شیر	P(A)= 50%

B1=یک شیری بودن	P(B1)=30%

B2=دو شیری بودن	P(B2)=70%

$$P(B2 \downarrow A) = \frac{P(B2).P(A\downarrow B2)}{P(B1).P(A\downarrow B1) + P(B2).P(A\downarrow B2)}$$

$$\frac{0.7*1}{0.3*0.5+0.7*1} = \frac{0.7}{0.85} = 0.81 = 81\%$$

62) مثال

آزمایش تشخیص سرطان در مورد 95٪ بیماران سرطانی جواب مثبت میدهد. آزمایش تشخیص سرطان در مورد 10٪ بیماران غیر سرطانی جواب مثبت میدهد . از بین بیماران یک بیمارستان که 3٪ آنها سرطانی هستند بیماری بتصادف انتخاب میکنیم . آزمایش تشخیص سرطان در مورد این بیمار سرطانی جواب مثبت میدهد احتمال اینکه واقعاً سرطانی باشد چقدر است.

A=پاسخ مثبت

B1=سرطانی باشد	P(B1)=3%

B2= سرطانی نباشد	P(B2)=97%

$$P(B1\downarrow A)=\frac{P(B1).P(A\downarrow B1)}{P(B1).P(A\downarrow B1)+P(B2).P(A\downarrow B2)}$$

$$\frac{0.03*0.95}{0.03*0.95+0.97*0.10}=$$

63) مثال

: فروشگاهی سه نوع لامپ از سه کارخانه میخرد بطوریکه 50٪ نیازش از کارخانه اول و 20٪ از کارخانه دوم و 30٪ از کارخانه سوم تامین میشود. از سوابق این کارخانه ها مشخص شده که از کل لامپهای تولیدی هر کارخانه، بترتیب کارخانه اول 1٪ لامپها معیوب و کارخانه دوم 4٪ معیوب و کارخانه سوم 6٪ معیوب میباشد. این فروشگاه از لامپهای موجود در انبارش یک لامپ بتصادف انتخاب میکند.

الف) احتمال اینکه این لامپ معیوب باشد؟

ب) اگر این لامپ معیوب باشد احتمال اینکه از کارخانه دوم باشد چقدر است؟

کارخانه	Tدرصد خرید	Kدر صد معیوب
A	.5	.01
B	.2	.04
C	.3	.06

حل: در قضیه بیز گفته شد اگر بتعداد Ei پیش آمد مستقل داشته باشیم اگر A یک پیش آمد دلخواه باشد آنگاه احتمال E_r بشرط رخداد A

$$P(E_r \mid A)=\frac{P(E_r)P(A|\,E_r)}{\sum_{i=1}^{n}P(E_i)P(A|\,E_i)}$$

الف) کل احتمال معیوب بودن، معادل مخرج کسر فرمول بیز میباشد

$$\sum P(E_i)P(A|E_i)=$$

اگر K معیوب بودن و سه کارخانه را A,B,C بنامیم

پس احتمال معیوب بودن معادل با احتمال معیوب بودن هرکارخانه و میزان خرید آن کارخانه میشود

$$P(K)=P(A,B,C|K)=P(A)P(K|A)+P(B)P(K|B)+P(C)P(K|C)$$
$$P(K)=(0.5*0.01)+(0.2*0.04)+(0.3*0.06)=0.031$$

ب)

$$\mathrm{P(B|K)}=\frac{\mathrm{P(B).P(K|B)}}{\mathrm{P(A).P(K|A)+P(B).P(K|B)+P(C).P(K|C)}}=\frac{0.2*0.04}{0.5*0.01+0.2*0.04+0.3*0.06}=\frac{0.008}{0.031}=\frac{8}{31}$$

64)

در ظرفی7توپ داریم (1 توپ سفید 4 توپ سیاه 2 توپ قرمز) . الف سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه یک توپ قرمز و دو توپ سیاه باشد چقدر است. ب)سه توپ یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است. ج)سه توپ یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم و به ظرف باز میگردانیم احتمال اینکه اولی قرمز و دومی سیاه و سومی سیاه باشد چقدر است.

*** حل :

$$p = \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1*6*2}{35} = \frac{12}{35}$$

$$p = \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{0}\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}\binom{1}{0}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{1}{0}\binom{3}{1}\binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} = \frac{2}{7}*\frac{4}{6}*\frac{3}{5} = \frac{4}{35}$$

$$p = \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{0}\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}\binom{2}{0}}{\binom{7}{1}} * \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}\binom{2}{0}}{\binom{7}{1}} = \frac{2}{7}*\frac{4}{7}*\frac{4}{7} = \frac{32}{343}$$

65)

آزمایشگاهی 6 روز هفته فعال است. تعداد آزمایشهای انجام شده در هر روز یکسان است. احتمال خطا در آزمایش سرطان در روزهای مختلف هفته: شنبه 5٪ یکشنبه 2 ٪ دوشنبه 1٪ سه شنبه 1٪ چهارشنبه 2٪ پنجشنبه 3% است. نتیجه آزمایشگاه برای تشخیص سرطان برای شخصی خطا داشت . احتمال اینکه رور یکشنبه آزمایش انجام شده باشد چقدر است.

*** حل : خطا را W و شنبه T0 و یکشنبه T1 و ... نام میگذاریم

$$P(T1|W) = \frac{P(T1)*P(W|T1)}{P(T0)*P(W|T0)+P(T1)*P(W|T1)+P(T2)*P(W|T2)+P(T3)*P(W|T3)+P(T4)*P(W|T4)} =$$

$$P(T1|W) = \frac{\frac{1}{6}*\frac{2}{100}}{\left(\frac{1}{6}*\frac{5}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{2}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{2}{100}\right)+\left(\frac{1}{6}*\frac{3}{100}\right)} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

تابع توزیع احتمال $F(x)$ – تابع احتمال/ چگالی/ $f(x)$

متغیر تصادفی Random Variable

تابعی از فضای نمونه – زیر مجموعه از اعداد حقیقی معمولا با حروف بزرگ مثل X نمایش میدهند
برد تابع را تکیه گاه متغیر تصادفی میگویند و با Sx نمایش میدهند

تابع توزیع Distribution Function

اگر X متغیر تصادفی باشد آنگاه تابع توزیع X بصورت $F_X(x)$ نشان میدهند دامنه تابع R میباشد و بصورت زیر تعریف میشود

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

خواص تابع توزیع

1- $0 \le F_X(x) \le 1$

2- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = F_x(-\infty) = 0$
$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = F_x(+\infty) = 1$

3- حداقل از راست در هر نقطه پیوسته است
4- غیر نزولی است یعنی

$$x_1 < x_2 \to F_X(x_1) < F_X(x_2)$$

نکته – هر تابع حقیقی که دارای چهار خاصیت فوق باشد تابع توزیع است
نکته –

$$\lim_{x\to a^+} F_X(x) = F_X(a^+)$$

تابع احتمال / چگالی/:

1- گسسته : اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد آنگاه تابع چگالی احتمال که با $f_X(x)$ نشان داده میشود بصورت زیر تعریف میشود

$$f_X(x) = P(X = x)$$

که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی است و دارای **دو خاصیت** زیر است

$$0 \le f(x) \le 1$$
$$\sum f(x) = 1$$

2- پیوسته : میزان فشردگی احتمال روی خط اعداد حقیقی تشکیل تابعی حقیقی میدهد بنام چگالی احتمال $f_X(x)$ که دارای **دو خاصیت** زیر است

$$0 \le f(x) \le 1$$
$$\int f(x)dx = 1$$

پس زمانی یک تابع چگالی احتمال میشود که هر دو شرط فوق را دارا باشد

☜ رابطه تابع توزیع با تابع چگالی احتمال

1- تبدیل در گسسته (با داشتن تابع چگالی احتمال   تابع توزیع بدست آورید و بالعکس)

$$F_X(x) = \sum_{t \le x} f_X(t)$$

$$f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

2- تبدیل در پیوسته (با داشتن تابع چگالی احتمال   تابع توزیع بدست آورید و بالعکس)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

66) مثال

سکه ای سه بار پرتاب میکنیم تعداد شیرها را بررسی نمایید

S={HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

تعداد شیر	0	1	1	2	1	2	2	3
احتمال هر مورد	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

احتمال دو شیر=3/8   احتمال سه شیر =1/8   احتمال یک شیر =3/8   احتمال اصلا شیر نیاد =1/8

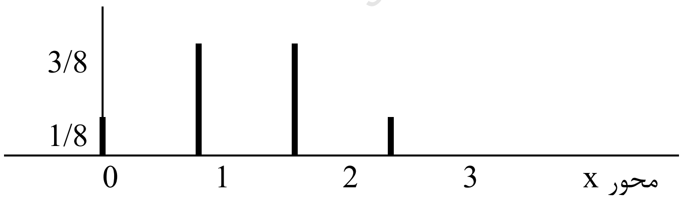
X=تعداد شیر	0	1	2	3
تابع احتمال P(X=x) = f(x) چگالی احتمال	1/8	3/8	3/8	1/8

Rx= { 0 , 1 , 2 , 3)   برد x

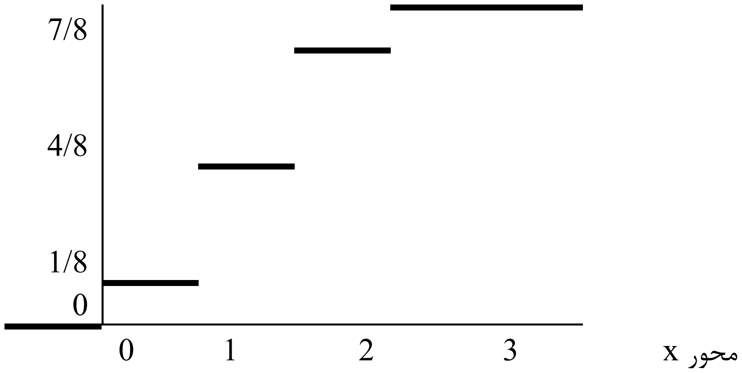
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \le x < 1 \\ 4/8 & 1 \le x < 2 \\ 7/8 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

تابع توزیع احتمال

f(x)=تابع چگالی احتمال



8/8=1   F(x)=تابع توزیع احتمال



67) مثال

شرکتی 8 کامپیوتر دارد که 3 عدد آن خراب است 2 کامپیوتر خرید میکنیم احتمال خرابی چقدر است

احتمال هر دو خراب $\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}}$

احتمال یکی خراب $\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}}$

احتمال صفر خراب = هر دو سالم $\frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}$

x= کامپیوتر خراب

R(x)= { 0,1,2 }

f(x)= تابع چگالی احتمال f (0)= 10/28 f(1)=15/28 f(2)=3/28

x	0	1	2
f(x)	10/28	15/28	3/28

ملاحظه میشود که هر f(x) بین صفر و یک و جمع f(x) برابر یک میشود

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 10/28 & x<1 \\ 25/28 & x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases}$$ تابع توزیع احتمال

میشود نمودار f(x) و F(x) را رسم نمود

68) مثال

A) آیا $f(x)=\frac{x-2}{5}$ بازاء x=1,2,3,4,5 یک تابع احتمال است؟

B) آیا $f(x)=\frac{x-1}{6}$ بازاء x=1,2,3,4 یک تابع احتمال است؟

C) آیا $f(x)=\frac{x+1}{5}$ بازاء x=0,1,2,3 یک تابع احتمال است؟

حل A)

همیشه باید دو شرط برقرار باشد تا تابع احتمال (چگالی احتمال) باشد

الف) $\sum f(x)=1$

$\sum f(x)=\frac{x-2}{5}=\frac{1-2}{5}+\frac{2-2}{5}+\frac{3-2}{5}+\frac{4-2}{5}+\frac{5-2}{5}$=-0.2+0+0.2+0.4+0.6=1

ب) در تمامی x ها $0\le f(x)\le 1$ باید باشد

ولی $f(x)$ بازاء یکی از مقادیر x (منفی شد) یعنی $\sum f(x=0)=-0.2$ شد و بین صفر و یک نگردید، پس f(x) تابع چگالی احتمال نیست

حل B)

حل همیشه باید دو شرط برقرار باشد تا تابع احتمال (چگالی احتمال) باشد

الف) باید $\sum f(x)=1$

$\sum f(x)=\frac{x-1}{6}=\frac{1-1}{6}+\frac{2-1}{6}+\frac{3-1}{6}+\frac{4-1}{6}$=1

ب) در تمامی x ها $0\le f(x)\le 1$ باید باشد

و $f(x)$ در این مورد بازاء تمامی مقادیر x بین صفر و یک گردید، پس f(x) تابع چگالی احتمال است

حل C)

$\sum f(x)=\frac{x+1}{5}=\frac{0+1}{5}+\frac{1+1}{5}+\frac{2+1}{5}+\frac{3+1}{5}=2$

همیشه باید دو شرط برقرار باشد شرط اول $\sum f(x)=1$ برقرار نیست پس تابع چگالی احتمال نیست

69) مثال

بازاء چه مقداری از k تابع $f(x)=\frac{x^2}{k+5}$ بازا x=0,1,2,3,4 یک تابع احتمال است

حل – متغیر x مقادیر خاص و گسسته بخود میگیرد پس تابع f(x) گسسته است

همیشه باید دو شرط برقرار باشد تا تابع احتمال (چگالی) باشد.

توزیع (تجمعی) F(x) را بنویسید ج) P(2≤x<4) بدست آورید د) امید ریاضی را بدست آورید E(x)

الف) $\sum f(x)=1$ ب) هر $0\le f(x)\le 1$ باید باشد

$$\sum f(x)=\frac{x^2}{k+5}=\frac{0^2}{k+5}+\frac{1^2}{k+5}+\frac{2^2}{k+5}+\frac{3^2}{k+5}+\frac{4^2}{k+5}=\frac{30}{k+5}$$

$$\sum f(x)=1\rightarrow\frac{30}{k+5}=1\ \rightarrow k+5=30\ \rightarrow k=25$$

همچنین بازاء k=25 و بازاء مقادیر مختلف x=0,1,2,3,4 آنگاه $0\le f(x)\le 1$ میشود جواب k=25 است

$$f(x)=\frac{x^2}{30}\quad x=0,1,2,3,4$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{0}{30}=0 & 0\le x<1\\ \frac{1}{30} & 1\le x<2\\ \frac{5}{30} & 2\le x<3\\ \frac{14}{30} & 3\le x<4\\ \frac{30}{30}=1 & 4\le x\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{c}0\le f(x)\le 1\ \rightarrow\quad f(x)=\frac{0}{30}+\frac{1}{30}=\frac{1}{30}\\ E(x)=\sum x*f(x)=0*\frac{0}{30}+1*\frac{1}{30}+2*\frac{4}{30}+3*\frac{9}{30}+4*\frac{16}{30}=\frac{52}{30}\end{array}\right\}$$

70) مثال

الف) در تابع زیر مقدار c را بدست آورید

ب)تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ را نوشته و رسم کنید

ج) احتمال $p(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2})$ را با تابع چگالی و همچنین با تابع توزیع بدست آوردید

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x & 0 \leq x \leq 1 \\ c - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & other \end{Bmatrix}$$

حل – متغیر x مقادیر پیوسته بخود میگیرد پس تابع f(x) پیوسته است شرط دوم را مینویسیم

$$\int f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (c-x)\,dx = \left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^1 + \left|cx - \frac{1}{2}x^2\right|_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(c*2 - \frac{1}{2}*4 - c*1 + \frac{1}{2}*1\right)$$

$$\int f(x)dx = c - 1$$

که شرط دوم یعنی انتگرال فوق باید برابر یک شود

$$c - 1 = 1 \quad \rightarrow \quad c = 2$$

بنابراین تابع احتمال (چگالی احتمال) بشرح زیر میگردد

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & other \end{Bmatrix}$$

این تابع چگالی احتمال است زیرا هر دو شرط را پوشش میدهد. برای بدست آوردن تابع توزیع احتمال:

$$-\infty \leq x < 0 \ \rightarrow \ F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$$

$$0 \leq x < 1 \ \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = 0 + \int_0^x xdx = \frac{1}{2}x^2$$

$$1 \leq x < 2 \ \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^x f(x)dx = 0 + \int_0^1 xdx + \int_1^x (2-x)dx$$

$$= 0 + \left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \left|(2x - \frac{1}{2}x^2)\right|_0^1 = \frac{1}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

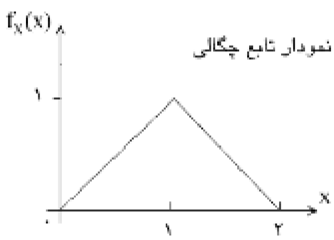
$$2 \leq x < \infty \ \rightarrow F(x)$$

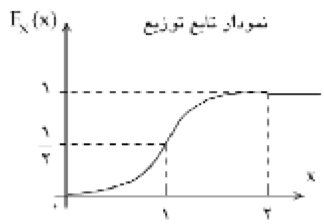
$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^x f(x)dx = 0 + \int_0^1 xdx$$

$$+ \int_1^2 (2-x)dx + \int_2^x odx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 4 - \frac{4}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{Bmatrix}$$





ج) با تابع احتمال مقدار $p(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2})$

$$p\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{3/2} f(x)dx = \int_{1/2}^{1} xdx + \int_{1}^{3/2}(2-x)dx = \left|\frac{1}{2}x^2\right|_{1/2}^{1} + \left|(2x - \frac{1}{2}x^2)\right|_{1}^{3/2} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{6}{2}-\frac{9}{8}-2+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

با تابع توزیع احتمال مقدار $p(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2})$

$$p\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right|_{x=\frac{3}{2}} - \left|\frac{1}{2}x^2\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

71)

در تابع چگالی احتمال زیر مقدار K را بدست آورید

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{2k+1} & x = 0,2,3 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{bmatrix}$$

جدول تابع چگالی با این مقدار k بنویسـید و صحت دو شرط تابع چگالی بررسی کنید و درجدول زیر مقادیر تابع چگالی و توزیع را بنویسید و امید ریاضی $E(x)$ و $\sigma^2(x)$ و $\sigma(x)$ و $p(x \ge 2)$ را محاسبه کنید

x			
f(x)			
F(x)			

حل : تابع گسسته است زیرا x مقادیر خاص دارد ***

$$\sum f(x) = 1 \quad \to \quad \frac{0}{2k+1} + \frac{2}{2k+1} + \frac{3}{2k+1} = 1 \quad \to \quad 2k+1 = 5 \quad \to \quad k = 2$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{5} & x = 0,2,3 \\ 0 & x = \text{دیگر} \end{bmatrix}$$

x		0	2	3	
f(x)		$\frac{0}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\sum f(x) = 1$ ok $0 \le f(x) \le 1$ *ok*
F(x)	0	$\frac{0}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{5} = 1$	

$$E(x) = \sum x * f(x) = \left(0 * \frac{0}{5}\right) + \left(2 * \frac{2}{5}\right) + \left(3 * \frac{3}{5}\right) = \frac{13}{5} = 2.6$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \sum x^2 * f(x) = \left(0^2 * \frac{0}{5}\right) + \left(2^2 * \frac{2}{5}\right) + \left(3^2 * \frac{3}{5}\right) = \frac{35}{5} = 7$$

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 = (7) - (2.6^2) = \qquad \sigma(x) = \sqrt{.24} = 0.48$$

$$p(x \ge 2) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

امید ریاضی(امید = میانگین = متوسط)

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته یا پیوسته باشد آنگاه امید ریاضی X که با علامت E(X) نشان داده میشود بصورت زیر تعریف میشود

$E(X) = \sum X f_X(x)$ گسسته

$E(X) = \int x f_X(x) dx$ پیوسته

امید ریاضی را میانگین و متوسط و انتظار نیز میگویند

خواص امید ریاضی

$aX + b \qquad E(aX + b) = aE(X) + b$

واریانس

$\sigma^2(x) = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$\boldsymbol{\sigma^2(x) = E(X^2) - (E(X))^2}$ **واریانس**

$\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}}$ **انحراف معیار**

خواص واریانس

$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

72) مثال

صاحب دستگاهی هستیم که دارای نمایش سه سکه است. هر بار فشردن دسته کل نمایش را تغییر میدهد . اگر بازیگری دکمه فشار دهد بازاء هر تعداد شیر باید 100 ریال بعنوان جایزه در یافت کند. صاحب دستگاه بازاء هر بازی چند ریال بگیرد که نه سود کند و نه ضرر

حل: شیر=H خط= T فضای کل حالات بصورت زیر است

S={HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

X=x شیر	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
X ریال	+a-300	+a-200	+a-200	+a-100	+a-200	+a-100	+a-100	+a
$f_X(x)$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

X=x تعداد شیر	3	2	1	0	سایرین
$f_X(x)$ تابع چگالی احتمال	1/8	3/8	3/8	1/8	0

X=x شیر	3	2	1	0	سایرین
X	+a-300	+a-200	+a-100	+a	(پولی دریافتی مثبت پول پرداختی منفی)
$f_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	0

$$E(x) = \sum x * f(x) = (+a) * \frac{1}{8} + (+a - 100) * \frac{3}{8} + (+a - 200) * \frac{3}{8} + (+a - 300) * \frac{1}{8} = 0$$

$a = 150$

یعنی صاحب دستگاه برای هر بازی باید 150تومان بگیرد تا برای تعداد زیادی بازی نه سود کند و نه ضرر

در حقیقت نام دیگر امید میانگین (متوسط) است

73)

مثال : صاحب دستگاهی هستیم که دارای نمایش سه سکه است. هر بار فشردن دسته کل نمایش را تغییر میدهد . اگر بازیگری دکمه فشار دهد بازاء هر تعداد شیر باید دو هزار تومان بعنوان جایزه در یافت کند. صاحب دستگاه بازاء هر بازی چند تومان بگیرد که هزار تومان سود کند

X=x	0	1	2	3	سایرین
X	+a	+a-2000	+a-4000	+a-6000	
$f_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	0

$$E(x)=\sum x*f(x)=(+a)*\frac{1}{8}+(+a-2000)*\frac{3}{8}+(+a-4000)*\frac{3}{8}+(+a-6000)*\frac{1}{8}=1000$$

یعنی صاحب دستگاه برای هر بازی باید 4هزار تومان بگیرد تا برای تعداد زیادی بازی در هر بازی هزار تومان سود کند $a=4000$

74) مثال

یک شرکت تولید برق در مقابل آتش سوزی به میزان خسارت کلی یک میلیارد تومان بیمه میشود. مدیر عامل از تجربیات خود میداند که :احتمال آتش سوزی کلی یک میلیونیم است. احتمال آتش سوزی 50٪ یک صدهزارم است. احتمال آتش سوزی 25٪ یک ده هزارم است. حق بیمه سالیانه چقدر باشد تا امید شرکت بیمه این باشد که در سال یک میلیون تومان سود کنیم

حل: احتمال حالتهایی که باید شرکت بیمه خسارت بدهد در بالا مشخص است فقط احتمال اینکه هیچ حادثه ای رخ ندهد به مقدار زیر میشود

1-0.000001-0.00001-0.0001=0.999889

که شرکت بیمه با احتمال0.999889 منتفع میشود

X=x	-1000	-500	-250	+a	مثبت انتفاع و منفی خسارت میباشد میلیون تومان
$f_X(x)$	0.000001	0.00001	0.0001	0.999889	

حال امید را برای سود یک میلیون تومان محاسبه میکنیم

$$E(X)=\sum_x xf_x(x)=1$$ میلیون تومان

1= (-1000*0.000001)+ (-500*0.00001)+ (-250*0.0001)+ (a*0.999889)

a=1.031114

یعنی اگر در سال یک میلیون سی هزارتومان دریافت کنیم سالی یک میلیون تومان سود میکنیم

☜ امید ریاضی(امید = میانگین = متوسط)

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته یا پیوسته باشد آنگاه امید ریاضی X که با علامت E(X) نشان داده میشود بصورت زیر تعریف میشود

$E(X) = \sum X f_X(x)$ گسسته

خواص امید ریاضی

$aX + b \quad \rightarrow \quad E(aX+b) = aE(X) + b$

واریانس

$\boldsymbol{\sigma^2(x) = E(X^2) - (E(X))^2}$

خواص واریانس

$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

❄ تمرین: در جدول زیر متغیر تصادفی x دارای تابع احتمال f(x) میباشد

الف: C را بدست آورید و جدول تابع چگالی و تابع توزیع را با این مقدار بنویسید ؟

ب) E(x+3)=? ج) Var(2x+1)=?

X=x	-1	0	1	سایرین
$f_X(x)$	½	C+1/6	¼	0

❄ تمرین: اگر متغیر تصادفی x دارای مقادیر زیر باشد آنگاه واریانس x را حساب کنید

$E(x) = 2$
$E(x(x-4)) = 5$

توزیع‌های مهم

آزمایش برنولی

آزمایشی که دارای دو نتیجه باشد (موفقیت S و شکست F) احتمال موفقیت را P و احتمال شکست 1-P میگردد.

توزیع دوجمله‌ای

اگر آزمایش برنولی را n بار بطور مستقل تکرار میکنیم و تعداد پیروزی‌ها را X بنامیم
برد تابع (تکیه گاه متغیر تصادفی)
متغیر تصادفی X دارای توزیع دوجمله ای بصورت زیر مینویسند

$$X \sim B(n, p)$$

تابع چگالی باین صورت است

$$f_x(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

توزیع پواسن

اگر یک آزمایش برنولی مستقلاً تکرار کنیم و تعداد پیروزیها در یک فاصله زمانی مشخص X بنامیم آنگاه X دارای توزیع پواسن با پارامتر لاندا است که لاندا متوسط پیروزها است

$$X \sim p(\lambda)$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

توزیع نرمال X

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & -\infty < x < +\infty \;,\; \mu = \text{میانگین} \quad \text{واریانس} \quad \sigma > 0 \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

توزیع نرمال استاندارد

اگر در توزیع نرمال میانگین مساوی صفر و واریانس یک باشد آنگاه توزیع نرمال استاندارد نامیده میشود

$$Z \sim N(0,1)$$

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z}{2}} & -\infty < x < +\infty \\ 0 & \text{سایرین} \end{cases}$$

ثابت شده است که در طبیعت آمار بصورت نرمال توزیع شده است که معمولاً ٪68 بین $\mu \pm \sigma$ و ٪96 بین $\mu \pm 2\sigma$ خواهد بود

توزیع نرمال استاندارد Z

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه متغیر تصادفی $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است با میانگین صفر و واریانس یک $Z \sim N(0,1)$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

و احتمال آن چنین خواهد بود

$$P(x \le b)$$

$$p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = p\left(z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow$$

حالا از روی جدول نرمال استاندارد احتمال حاصل میشود

درحالت جمعیت m تایی که نمونه n تایی از داخل m انتخاب کنیم در فرمول بالا بجای σ مقدار $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

طریقه استفاده از جدول نرمال

جدول برای مقادیر کوچکتر یا مساوی است

در اولین ستون سمت چپ مقدار عدد مربوط به Z که هم مقادیر مثبت و هم منفی دارد و در اولین سطر رقم صدگان بصورت مثبت و دنباله Z است که با هم جمع جبری میشود

در داخل جدول از سمت چپ بالا احتمال صفر است و در سمت راست پایین عدد احتمال یک است

Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
-3.4	0.0003	0.0003	[illegible]	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008
-3	[illegible]	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	[illegible]	0.0016	0.0016
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	[illegible]	0.0023	0.0022
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071

مثلا اگر سوال شود که $P(z \le -2.73) = ?$

با توجه به جدول فوق

$$P(z \le -2.73) = 0.0032$$

Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$Z_{0.05} = a$

$p(z > a) = 0.05$

$1 - p(z \le a) = 0.05$

$p(z \le a) = 0.95$

$z_{\alpha} = -z_{1-\alpha}$

جدول توزیع نرمال

جدول توزیع دوجمله ای

n	r	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	p
5	0	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000	
5	1	0.9185	0.7373	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005	
5	2	0.9914	0.9421	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086	
5	3	0.9995	0.9933	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815	
5	4	1.0000	0.9997	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095	
5	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
10	0	0.3487	0.1074	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	
10	1	0.7361	0.3758	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000	
10	2	0.9298	0.6778	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000	
10	3	0.9872	0.8791	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000	
10	4	0.9984	0.9672	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0473	0.0064	0.0001	
10	5	0.9999	0.9936	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016	
10	6	1.0000	0.9991	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128	
10	7	1.0000	0.9999	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702	
10	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639	
10	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513	
10	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
15	0	0.2059	0.0352	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
15	1	0.5490	0.1671	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
15	2	0.8159	0.3980	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	
15	3	0.9444	0.6482	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000	
15	4	0.9873	0.8358	0.5155	0.2173	0.0592	0.0093	0.0007	0.0000	0.0000	
15	5	0.9978	0.9389	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000	
15	6	0.9997	0.9819	0.8689	0.6098	0.3036	0.0950	0.0152	0.0008	0.0000	
15	7	1.0000	0.9958	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000	
15	8	1.0000	0.9992	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003	
15	9	1.0000	0.9999	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0022	
15	10	1.0000	1.0000	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127	
15	11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556	
15	12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841	
15	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510	
15	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941	
15	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
20	0	0.1216	0.0115	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
20	1	0.3917	0.0692	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
20	2	0.6769	0.2061	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
20	3	0.8670	0.4114	0.1071	0.0160	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
20	4	0.9568	0.6296	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	
20	5	0.9887	0.8042	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000	
20	6	0.9976	0.9133	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000	
20	7	0.9996	0.9679	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000	
20	8	0.9999	0.9900	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000	
20	9	1.0000	0.9974	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000	
20	10	1.0000	0.9994	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000	
20	11	1.0000	0.9999	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001	
20	12	1.0000	1.0000	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004	
20	13	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024	
20	14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113	
20	15	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432	
20	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330	
20	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231	
20	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083	
20	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784	
20	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{n} b(y; n, p)$$

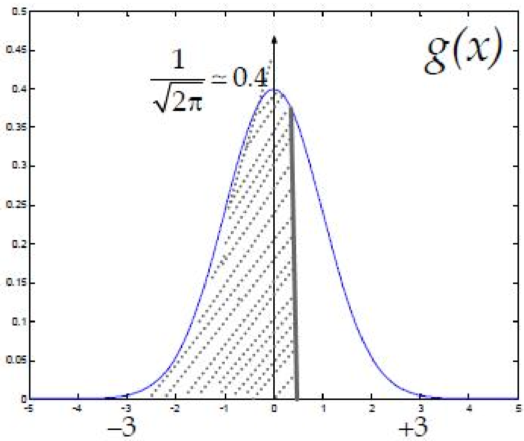
$$E(x) = np$$

$$\sigma^{2}(x) = np(1-p)$$

☜ جدول توزیع – احتمال – امید(متوسط) - واریانس

توزیع	احتمال	متوسط یا میانگین	واریانس	
برنولی $x \sim B(n,p)$ $n=1$	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	pq	$x=0,1$
دوجمله ای $x \sim B(n,p)$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$	np	npq	$x=0,1,\ldots.n$
پواسن $x \sim P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$x=0,1,\ldots.$
نرمال $x \sim N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$	μ	σ^2	$-\infty \le x \le +\infty$
نرمال استاندارد $x \sim N(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z}{2}}$	0	1	$-\infty \le z \le +\infty$

نرمال استاندارد و منحنی آن



$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$g(x) = g(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

مقدار $g(x)$ برای خارج بازهٔ $(-3, 3)$ بسیار کوچک است و نقاط عطف آن 1 و -1 هستند.

75) مثال

تیراندازی 20 بار بطرف یک هدف شلیک میکند احتمال به هدف اصابت کردن هر شلیک 0.4 است

الف) تابع چگالی احتمال را بنویسید

ب) احتمال اینکه از این 20 بار دقیقا 12 بار بهدف بخورد چقدر است

ج) احتمال اینکه از این 20 بار حداکثر 12 بار بهدف بخورد چقدر است

توجه شود که در آزمایش برنولی زمان و مکان مطرح نیست

حل: چون این مسئله دو حالتی است (یا به هدف میخورد یا نمیخورد) پس برنولی(یا دو جمله‌ای) است

$$f_x(x)=\begin{cases}\binom{20}{x}0.4^x0.6^{20-x} & x=0,1,2,....20\\ 0 & \text{سایرین}\end{cases}$$

$$P(x=12)=\binom{20}{12}0.4^{12}0.6^{8}$$

$$P(x\le 12)=\sum_{x=0}^{12}\binom{20}{x}0.4^x0.6^{20-x}$$

ضمنا اگر جدول کوچکتر یا مساوی در دسترس باشد میتوان نوشت

$$P(x=a)=F_x(a)-F_x(a^-)$$
$$P(x=12)=P(x\le 12)-P(x\le 11)$$

در جدول برای موارد ذیل داریم

$$n=20,\ p=0.4,\ r\le 12$$
$$P(x\le 12)=0.97$$
$$P(x\le 11)=0.943$$
$$P(x=12)=0.97-0.943=0.0355$$
$$P(x\succ 12)=1-P(x\le 12)=1-0.943=0.0565$$

تمرین: در یک کارخانه 90٪ محصولات سالم هستند 3 محصول از این کارخانه میخریم احتمال اینکه حداکثر یک محصول سالم باشد چقدر است؟ میانگین(امید) سالم بودن این سه محصول چقدر است؟ واریانس چقدر است؟

76) مثال

در سال گذشته بطور متوسط 10 زلزله در شمال کشور بوقوع پیوسته است
احتمال اینکه در سه ماه آینده دقیقا 3 زلزله بوقوع بپیوندد چقدر است
احتمال اینکه در سه ماه آینده حداکثر 6 زلزله بوقوع بپیوندد چقدر است
حل : چون موضوع در حوزه زمان است پس توزیع پواسن است
در 12 ماه گذشته 10 لرزه داشته ایم بنابراین در 3 گذشته ماه با یک تناسب ساده 2.5 زلزله بطور متوسط داشته ایم($\lambda = 2.5$). ضمنا با فرض ($e = 2.7183$) مسئله را حل میکنیم

$$p(x=3), x \sim p(2.5)$$

$$p(x=3) = \frac{e^{-2.5}\, 2.5^3}{3!}$$

$$p(x \le 6) = \sum_{x=0}^{6} \frac{e^{-2.5}\, 2.5^x}{x!}$$

تمرین: یک دستگاه چاپگر به طور متوسط در هر ماه 2 بار سرویس میشود چقدر احتمال دارد که در 3 ماه حداکثر یکبار سرویس شود ؟ میانگین و واریانس این توزیع چقدر است؟

☜ حالت اول توزیع نرمال :

تعداد جمعیت مشخص – میانگین جمعت مشخص – انحراف معیار جمعیت مشخص – یک سوال میشود که احتمال بدست آمدن a از جمعیت چقدر است

$$X \approx N(\mu , \sigma^2) \qquad p(x < a) = ? \qquad p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = ?$$

بدینترتیب میگوییم جمعیت به نرمال استاندارد تغییر یافت

$p\left(z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = ?$ حال از جدول نرمال استاندارد

☜ حالت دوم توزیع نرمال :

از جمعیتی - تعداد نمونه مشخص n – میانگین نمونه مشخص – انحراف معیار نمونه مشخص – یک سوال میشود که احتمال بدست آمدن a از جمعیت چقدر است

$$X \approx N(\mu , \sigma^2) \qquad p(x < a) = ? \qquad p\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = ?$$

بدینترتیب میگوییم جمعیت به نرمال استاندارد تغییر یافت

$p\left(z < \frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = ?$ حال از جدول نرمال استاندارد

77) مثال

در یک کلاس با 40 دانشجو دارای توزیع نرمال و میانگین نمرات 15 و انحراف معیار 4 میباشد یک دانشجو انتخاب میکنیم. الف) احتمال اینکه نمره دانشجو حداکثر 10 شود چقدر است؟ ب) احتمال اینکه نمره دانشجو بیشتر از 10 شود چقدر است(جدول پیوست شده) ج) احتمال اینکه نمره دقیقا 10 شود؟

حل: توجه شود مسئله ذکر کرده توزیع نرمال است و توجه شود که جدول برای مقادیر کوچکتر یا مساوی و همچنین جدول برای نرمال استاندارد است

$$X \approx N(15\,,4^2) \qquad p(x \le 10) = ? \qquad p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{10-15}{4}\right) = ?$$

بدینترتیب میگوییم جمعیت به نرمال استاندارد تغییر یافت

الف) که از جدول نرمال استاندارد $p(z \le -1.25) = 0.1056$

$$p(x > 10) = 1 - p(z \le 10) = 1 - p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{10-15}{4}\right) = 1 - p(z \le -1.25) =$$

ب) $1 - 0.1056 = 0.8944$

$$p(x = 10) = p(x \le 10) - p(x \le 9) = p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{10-15}{4}\right) - p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{9-15}{4}\right) =$$

ج) $= p(z \le -1.25) - p(z \le -1.5) = 0.1056 - 0.0668 = 0.0388$

78) مثال

از بین 320 نفر دانشجویان دانشگاه، 10 نفر دانشجو انتخاب میکنیم میانگین نمرات این 10 دانشجو برابر با 15 و انحراف معیار 4 میباشد(توزیع نرمال) دانشجویی بتصادف از 320 نفر دانشجویان دانشگاه انتخاب میکنیم

الف) احتمال اینکه نمره دانشجو کمتر از 12 شود چقدر است

ب) احتمال اینکه نمره دانشجو بیشتر از 12 شود چقدر است(جدول پیوست شده)

$$X \approx N(15\,,4^2) \qquad p(x \le 12) = ? \quad p\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} \le \frac{12-15}{\sqrt{\frac{4^2}{10}}}\right) = ?$$

بدینترتیب میگوییم جمعیت به نرمال استاندارد تغییر یافت

الف) که از جدول نرمال استاندارد $p(z \le -2.37) = 0.0089$

$$p(x > 12) = p\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} > \frac{12-15}{\sqrt{\frac{4^2}{10}}}\right) = p(z > -2.37) = 1 - p(z \le -2.37) = 1 - 0.0089 = 0.9911$$

79) مثال

نمرات امتحان کلاسـی دارای توزیع نرمال و میانگین 65 و انحراف معیار 4 میباشـد ، از این کلاس 40 نفری 4 نفر مردود شدند ، کمترین نمره قبولی را مشخص کنید

$$v = \sigma^2 = 4^2 = 16$$

$$X \approx N(\mu, \sigma^2) = (65,16)$$

برای تقریب به توزیع نرمال چون حدنهایی جمعیت و نمونه یکی است و مشخص است تقسیم بر σ و گرنه تقسیم بر $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

$$p(x<a) = \frac{4}{40} = 0.1$$

$$p(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{a-65}{4}) = 0.1$$

$$p(z < \frac{a-65}{4}) = 0.1$$

از روی جدول عدد 1.28 - حاصل میشود

$$\frac{a-65}{4} = -1.28 \Rightarrow a = 59.88$$

اگر در توزیع دوجمله ای احتمال شکست و پیروزی مساوی باشد آنگاه:

$$P(x) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}$$

80)

در یک خانواده با پنج فرزند احتمال اینکه حتما دو فرزند دختر باشد؟ احتمال اینکه حداکثر دو فرزند دختر باشد؟ احتمال اینکه بیش از سه فرزند دختر باشد

$$P(x=2) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n} = \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{32} = 0.31$$

$$P(x \le 2) = \sum_{x=0}^{x=2} \frac{\binom{n}{x}}{2^n} = \frac{\binom{5}{0}}{2^5} + \frac{\binom{5}{1}}{2^5} + \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = \frac{16}{32} = 0.5$$

$$(x \ge 3) = \sum_{x=3}^{x=5} \frac{\binom{n}{x}}{2^n} = \frac{\binom{5}{3}}{2^5} + \frac{\binom{5}{4}}{2^5} + \frac{\binom{5}{5}}{2^5} = \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = 0.5$$

توزیع *t-student*

این توزیع برای نمونه های گوچکتر از 30 میباشـد و با یک درجه آزادی همراه است هرچه درجه آزادی بیشتر باشد نمودار تابع چگالی احتمال به نمودار نرمال اسـتاندارد نزدیک اسـت با درجه آزادی 30 و بیشتر تابع توزیع t بر تابع توزیع نرمال دقیقاً منطبق میشود

$$x \sim t(n)$$

دیگر توزیع ها

توزیع هندسی توزیع فوق هندسی

توزیع تی *t* توزیع کای مربع توزیع *F*

81) مثال

در خصوص X متغیر تصادفی برنولی امید و واریانس را بدست آورید

$$E(X) = \sum XP_X(x) = (1 * p) + \big(0 * (1-p)\big) \quad \rightarrow \quad E(X) = p$$
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 \quad \rightarrow \quad Var(x) = p(1-p)$$

82) مثال

در یک نقل و انتقال داده‌ها- درجه حرارت بصورت زیر تعریف میشود

الف - آیا چگالی احتمال است

ب - احتمال بین صفر و یک چقدر است

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

حل :

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9} \Big]_{-1}^{2} = \frac{8}{9} - (-\frac{1}{9}) = 1$$ شرط اول برقرار است

$f(x=0) = 0 \qquad f(x=2) = \frac{4}{3} \geq 1$ شرط دوم برقرار نیست پس چگالی احتمال نیست

83) مثال

خراب شدن یک مونیتور دارای چگالی احتمال زیر است λ را حساب کنید و تابع آنرا بنویسید

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \ e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حل :

$$\int_{0}^{\infty} \lambda \ e^{-x/100} \, dx = -100\, \lambda\, e^{-x/100} \Big]_0^{\infty} = 1 \quad \Rightarrow \lambda = 1/100$$

$$f(x) = \begin{cases} 0.01\, e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

توجه شود

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

احتمال توام

84) مثال

ظرفی شامل 2 توپ قرمز و 3 توپ آبی و 3 توپ مشکی است دو عدد توپ انتخاب میکنیم

الف- برد توپهای آبی و قرمز را مشخص کنید ب - توزیع احتمال توام را بنویسید ج - فرض کنید یکی از توپها قرمز باشد با چه احتمالی توپ دیگر آبی است د - آیا دوتابع احتمال مستقل هستند ه- بطور متوسط حاصلضرب تعداد توپ آبی در قرمز چقدر است

y = تعداد توپ قرمز x = تعداد توپ آبی

y = 0 , 1 , 2 x = 0 , 1 , 2

R(y) = { 0 , 1 , 2 } R(x) = { 0 , 1 , 2 } جواب الف

---

f(x , y)

$$f(0,0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28} \qquad f(0,1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28} \qquad f(0,2)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{1}{28}$$

$$f(1,0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{9}{28} \qquad f(1,1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28} \qquad f(1,2)=NotPssible$$

$$f(2,0)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

ب - جدول توزیع احتمال توام -

x / y	0	1	2	h(y)
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	6/28	6/28	-	12/28
2	1/28	-	-	1/28
g(x)	10/28	15/28	3/28	28/28 = 1

ج) توجه شود که احتمال اینکه از دو توپ یکی آبی و یکی قرمز باشد 6/28 است ولی اگر حتما یکی قرمز باشد آنگاه احتمال اینکه دومی آبی باشد تفسیر میشود به اینکه کل حالات یک قرمز معادل 12/28 میباشد و تعداد حالات مورد نظر(یکی آبی) 6/28 میباشد بنابراین احتمال خواسته شده عبارت از حاصل تقسیم حالات مورد نظر بر تعداد کل حالات، که بشرح ذیل هم تایید میشود.

$$f(x|y=1)=\frac{f(x,y)}{h(y)}=\frac{f(x,1)}{h(1)}=\frac{f(x,1)}{12/28}$$

X	0	1	2
$f(x\|y=1)$	$\frac{f(0,1)}{h(1)}=\frac{6/28}{12/28}=1/2$	$\frac{f(1,1)}{h(1)}=\frac{6/28}{12/28}=1/2$	$\frac{f(2,1)}{h(1)}=0$

ملاحظه میشود که 50 درصد احتمال دارد دیگری آبی باشد

---

g(x) * h(y) = g(0) * h (0) = 10/28 * 15/28 ≠ f(x,y)=f(0,0)=3/28

د - دو تابع احتمال مستقل نیستند

---س---------

E[u(x,y)]=∑ ∑ u(x,y) f (x,y) حاصل ضرب تعداد توپ قرمز در آبی

E(x.y)= ∑ ∑ x. y f(x,y) = 0*0*3/28+ 0*1*9/38 + 0*2*3/28 + 1*0*6/28 + 1*1*6/28 + 2*0*1/28 = 6/2

مثال 85)

سکه ای را 3 مرتبه پرتاب میکنیم X را تعداد شیر در سه پرتاب و Y را تعداد شیر در پرتاب سوم میناميم تابع احتمال توام X,Y بنویسید و اگر $A = \{(X,Y)|x \le y\}$ بنامیم آنگاه $P\{(X,Y) \in A\}$ محاسبه کنید

H= شیر T= خط

S={HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

تعداد شیر در سه پرتاب	3	2	2	1	2	1	1	0
احتمال هر مورد در سه پرتاب	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
تعداد شیر در پرتاب سوم	1	0	1	0	1	0	1	0
احتمال هر مورد در پرتاب سوم	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

3/8=احتمال دو شیر 1/8= احتمال سه شیر 3/8= احتمال یک شیر 1/8= احتمال اصلا شیر نیاد

x y	0	1	2	3	h(y)
0	1/8	2/8	1/8	-	4/8
1	-	1/8	2/8	1/8	4/8
g(x)	1/8	3/8	3/8	1/8	جمع= 1

برای $x \le y$ آنگاه

$$P\{(X,Y) \in A\} = P(x=0,y=0) + P(x=0,y=1) + P(x=1,y=1) = \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مثال 86)

– اگر x ضخامت ورق جوشکاری شده و y مقاومت ورق برش داده شده باشد که دارای تابع زیر باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/500 & 0 \le x \le 0.25\ ,\ 0 \le y \le 2000 \\ 0 & \text{ßé Óè} \end{cases}$$

الف – آیا تابع چگالی احتمال میباشد

ب – با چه احتمالی [$0.1 < x < 0.2\ ,\ 100 < y < 200$]P است

ج – چگالی های کناری را بنویسید د – چنانکه x=0.1 باشد احتمال y را پیدا کنید

ه – آیا x و y مستقل هستند

الف
$$\int_0^{0.25}\int_0^{2000} \frac{1}{500}dxdy = \int_0^{0.25} \frac{1}{500} y \Big|_0^{2000} dx = 1$$

ب
$$\int_{0.1}^{0.2}\int_{100}^{200} \frac{1}{500}dxdy = \int_{0.1}^{0.2} \frac{1}{500} y \Big|_{100}^{200} dx = \int_{0.1}^{0.2} \frac{1}{5}dx = \frac{1}{50}$$

ج
$$g(x) = \int_0^{2000} 1/500 \ \ dy = 4 \quad 0 \le x \le 0.25$$

$$h(y) = \int_0^{0.25} 1/500 \ \ dx = 1/2000 \quad 0 \le y \le 2000$$

د
$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{1/500}{4} = \frac{1}{2000}$$

g(0.1) . h(100)= 4 * 1/2000 = 1/500

f(0.1,100) = 1/500

f(0.1,100)=g(0.1)*h(100) پس مستقل هستند

87) مثال

- الف - برای تابع زیر احتمالهای شرطی را حساب کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3} & 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

ب - $f(x|y=1)$ را بدست آورید و سپس $\int_{x=0}^{x=1} f(x|y=1)$ را بدست آورید

$$g(x)=\int_{y=0}^{y=2}(x^2+\frac{xy}{3})dy=x^2y+\frac{xy^2}{6}\ \Big|_0^2=2x^2+\frac{2}{3}x$$

$$h(x)=\int_{x=0}^{x=2}(x^2+\frac{xy}{3})dx=\frac{x^2}{3}+\frac{x^2y}{6}\ \Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}$$

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{2x^2+\frac{2}{3}x}=\frac{x+\frac{y}{3}}{2x+\frac{2}{3}}$$

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{h(y)}=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{y}{6}}$$

$$f(x|y=1)=\frac{f(x,1)}{h(1)}=\frac{x^2+\frac{x}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{y}{6}}=2(x^2+\frac{x}{3})$$

جواب ب $\int_{x=0}^{x=1} f(x|y=1)dx=2[\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{6}]\ \Big|_0^1=2x(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=1$

88) مثال

تعداد اتومبیلهایی که بین ساعت 5 تا 7 صبح به یک پمپ بنزین وارد میشوند دارای احتمال ذیل است و در آمد پمپ v=2x-1 میباشد متوسط در آمد را حساب کنید

x= تعداد	4	5	6	7	8	9
f (x)	1/12	1/12	1/4	¼	1/6	1/6

E(U(x))=Σ U(x)f(x)=(2*4 - 1)*1/12 + (2*5 - 1) * 1/12 + (2* 6 - 1) * 1/4 + (2*7 - 1) *1/4 + (2* 8 - 1) *1/6 + (2 * 9 -1) * 1/6 = 12.67

89) مثال

- اگر یک تابع احتمال بصـورت $\{ \quad f(x) = x^2 / 3 \quad -1 < x < 2 \quad \}$ باشـد و $g(x) = 4x + 3$ باشـد متوسـط $g(x)$ را بدست آورید

$$E(g(x)) = \int_{-1}^{2} f(x) g(x) dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} \ (4x + 3) \ dx \ = \ 8$$

90) مثال

- معدنی سه درب دارد

درب اول بعد از 3 ساعت به خروجی تونل منتهی میشود

درب دوم بعد از 5 ساعت به محل قبلی بر میگردد

درب سوم بعد از 7 ساعت به محل قبلی بر میگردد

اگر معدنچی هر بار با انتخاب یکسان درب ها را انتخاب کند بطور متوسط بعد از چند ساعت به محل امن میرسد

$E(x) = E(x|y_i).\, p(y_i)$

$E(x) = E(x|y=1)\ p(y=1)\ + E(x|y=2)\ p(y=2)\ + \ E(x|y=3)\ p(y=3)$

p(y=1)= 1/3 p (y=2)= 1/3 p (y=3) = 1/3

E(x)= 1/3 [E(x|y=1)+ E(x|y=2)+ E(x|y=3)]

E(x)= 1/3 [(3) + (5+E(x)) + (7+ E(x))]

E(x) = 1 + 5/3 + 1/3 E(x) + 7/3 + 1/3 E(x)

E(x) = 15

توجه شود میتوانستیم 3+5+7 = 15 را بدست آوریم !!!!!

☜ امیدهای ریاضی مخصوص

1 - اگر $u(x) = x$ باشد آنگاه

$$E(x)=E[u(x)]=u(x)=\begin{cases}\sum_x xf(x)\\ \int_{U} xf(x)dx\end{cases}$$

به آن گشتاور مرتبه اول حول محور مختصات یا میانگین متغیر تصادفی x گویند

2- اگر $u(x)=(x-u(x))^2$ باشد آنگاه

$$E(x)=E[x-u(x)]^2=\left\{\begin{Bmatrix}\sum_x (x-u(x))^2\ f(x)\\ \int_x (x-u(x))^2\ f(x)dx\end{Bmatrix}\right\}=\sigma_x^{\ 2}$$

به آن گشتاور مرتبه دوم حول میانگین و یا واریانس متغیر تصادفی x گویند

در حقیقت میزان پراکندگی حول x را نشان میدهد

به σ_x انحراف معیار یا انحراف استاندارد گویند

91) مثال

رابطه $\sigma_x^{\ 2}$ را بر حسب E بدست آورید

$$\sigma_x^{\ 2}=\mathrm{var}(x)=E(x-u(x))^2=E(x^2-2x\,u(x)\ +\ \mathrm{u}^2(x))=E(x^2)-2E(x)\ E(u(x))+E(u^2(x))$$

$$=\ \mathrm{E}(\mathrm{x}^2)-2u(x).u(x)+u^2(x)=E(x)^2-u^2(x)=E\,\mathrm{x}^2-E^2\ \mathrm{x}$$

واریانس همیشه مثبت است

3- واریانس متغیر تصادفی g(x)

$$\sigma^2 g(x)=Var\ g(x)\ =\ \begin{Bmatrix}\sum(\mathrm{g(x)}-\mathrm{E(g(x))})^2\ f(x)\\ \int\ (g(x)-E(g(x)))^2\ f(x)dx\end{Bmatrix}$$

4- کوواریانس بین متغیرهای تصادفی x و y با توزیع احتمال با هم f(x,y)

$$Cov(x,y)=\sigma_{xy}=E\big[(x-u_x)(y-u_y)\big]$$

$$=\begin{Bmatrix}\sum_x\sum_y(x-u_x)(y-u_y)\ f(x,y)\\ \int_x\ \int_y(x-u_x)(y-u_y)\ f(x,y)dxdy\end{Bmatrix}$$

$$Cov(x,y)=E(xy-xu_y-yu_x+u_xu_y)=E(xy)-E(x)u_y-E(y)u_x+u_xu_y)=$$

$$=E(xy)-E(x)E(y)$$

اگر x و y مستقل باشند آنگاه

E(xy)=E(x)E(y)
Cov(x,y)=0

توجه شود کوواریانس صفر الزاما به مفهوم استقلال متغیرهای تصادفی نیست.

اگر x و y مستقل آنگاه Cov=0

اگر تغییرات x در خلاف جهت تغییرات y آنگاه Cov<0

اگر تغییرات x در هم جهت تغییرات y آنگاه Cov>0

در حقیقت Cov رابطه بین تغییرات دو متغیر تصادفی را نشان میدهد

** ضریب همبستگی

$$\rho = \frac{Cov(x,y)}{\sigma x \ \sigma y}$$

$$-1 \le \rho \le 1$$

اگر x و y رابطه خطی داشته باشند p=1 میباشد

اگر x و y رابطه معکوس خطی داشته باشند p= -1 میباشد

اگر x و y رابطه نداشته باشند p=0 میباشد

خواص واریانس

1- اگر a عدد ثابت باشد

$$V(a) = 0$$

$$V(ax) = a^2 V(x) \qquad \Rightarrow \qquad V(ax) = E[ax - au_x]^2 = a^2 E[x - u_x]^2 = a^2 V(x)$$

$$V(ax+b) = a^2 V(x)$$

$$V(ax \pm by) = a^2 V(x) + b^2 V(y) \pm 2abCov(x,y)$$

92) مثال

ثابت کنید $-1 \le \rho \le 1$

$$V\left(\frac{x}{\sigma x} + \frac{y}{\sigma y}\right) \ge 0$$

$$\frac{V(x)}{\sigma^2 x} + \frac{V(y)}{\sigma^2 y} + 2\frac{Cov(x,y)}{\sigma x \sigma y} \ge 0$$

$$1 + 1 \pm 2p \ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad -1 \le p \le 1$$

گشتاور اول و دوم حول محور مختصات قبلا گفته شد

گشتاور k ام حول مبدا مختصات (مثال : گشتاور اول و دوم حول محور مختصات)

$$u_x = \begin{Bmatrix} \sum_k x^k f(x) \\ \int_x f(x)dx \end{Bmatrix}$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1' = u_k$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad u_2' = E(x^2)$$

گشتاور k ام حول میانگین (مثال : گشتاور اول و دوم حول میانگین)

$$u_k = \begin{Bmatrix} \sum_k (x-u_k)^k f(x) \\ \int_k (x-u_k)^k f(x)dx \end{Bmatrix}$$

$$k = 1 \quad u_k = 0 \quad \Rightarrow E(x-u_x) = E(x) - u_x = u_x - u_x = 0$$

$$k = 2 \quad u_2 = \sigma_x^2 = u_2' - u_1'^2 = E(x^2) - E^2(x)$$

☜ ** نامساوی مارکف

اگر x یک متغیر تصادفی باشد که مقادیر غیر منفی بخود تخصیص دهد آنگاه

$$p\{x \ge a\} \le \frac{E(x)}{a}$$

اثبات : فرض کنیم

$$y = \begin{Bmatrix} 1 & x \ge a \\ 0 & x < a \end{Bmatrix}$$

$$x \ge a \quad \Rightarrow \frac{x}{a} \ge 1 \quad \Rightarrow \frac{x}{a} \ge y \quad \Rightarrow E(\frac{x}{a}) \ge E(y) \quad \Rightarrow \frac{1}{a}E(x) \ge E(y) \quad (1)$$

$$E(y) = E(y=0)\,p(y=0) + e(y=1)\,p(y=1) = 0 * p(y=0) + 1 * p(y=1)$$

$$= 0 + 1 * p(x \ge a) = p(x \ge a) \qquad \Rightarrow E(y) = p(x \ge a) \qquad (2)$$

$$(1)\ ,\ (2) \quad \Rightarrow p(x \ge a) \le \frac{1}{a}E(x)$$

93) مثال

کارخانه ای بطور متوسط 50 قطعه تولید میکند احتمال اینکه تولید هفتگی از 75 بیشتر باشد

$$p(x \ge 75) \le \frac{E(x-50)}{75} \quad \Rightarrow p(x \ge 75) \le \frac{50}{75} \Rightarrow p(x \ge 75) \le \frac{2}{3}$$

با وجودیکه هیچ اطلاعاتی از تولید کارخانه نداریم میتوان گفت که احتمال اینکه تولید بیشتر از 75 قطعه بشود 66٪ میباشد

☜ ** نامساوی چبی شف

اگر x یک متغیر تصادفی با میانگین $\mu_{\hat{U}}$ و واریانس $\sigma^2_{\hat{U}}$ باشد آنگاه برای k>0 خواهیم داشت

$$p[|x-u_x| \ge k] \le \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$k \to k\sigma \Rightarrow p[|x-u_x| \ge k\sigma] \le \frac{1}{k^2}$$

اثبات میدانیم $(x-u_x)^2$ یک متغیر تصادفی با مقادیر غیر منفی است حال با توجه به نامساوی مارکف میتوان نوشت

$$p(x \ge a) \le \frac{E(x)}{a}$$

$$p(x^2 \ge a^2) \le \frac{E^2(x)}{a^2}$$

$$a \to k^2 \quad , \quad x \to x-u_x$$

$$p((x-u_x)^2 \ge k^2) \le \frac{E(x-u_x)^2}{k^2} \qquad \Rightarrow p(|x-u_x| \ge k) \le \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$k \to k\sigma \quad \Rightarrow \quad p(|x-u_x|^2 \ge k\sigma) \le \frac{1}{k^2}$$

94) مثال

تعداد قطعات تولیدی کارخانه ای دارای میانگین 50 و واریانس 25 میباشـــد ، احتمال اینکه تعداد تولید بین 40 و 60 باشد چقدر است

$$\sigma_x^2 = 25, u_x = 50, k = 50-40 = k = 60-50 = 10$$
$$p[|x-u_x| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$
$$p(x-u_x \geq k, -(x-u_x) \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$
$$p(x-50 \geq 10, x-50 \leq -10) \leq \frac{25}{100}$$
$$p(x \geq 60, x \leq 40) \leq 0.25 \quad \Rightarrow p(40 \leq x \leq 60) \leq 1-0.25 \Rightarrow p(40 \leq x \leq 60) \leq 0.75$$

95) مثال

اگر f(x) را با شرط زیر داشته باشیم

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

آنگاه مقدار $p[|x-5| \geq 4]$ را بدست آورید

طریق اول

$$E(x) = \int_0^{10} x f(x) dx = \int_0^{10} x \frac{1}{10} dx = \frac{x^2}{20}]_0^{10} = 5$$
$$E(x) = 5 \Rightarrow E^2(x) = 25$$
$$E(x^2) = \int_0^{10} x^2 f(x) dx = \int_0^{10} x^2 \frac{1}{10} dx = \frac{x^2}{30}]_0^{10} = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3}$$
$$E(x^2) = \frac{100}{3}$$
$$V(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{100}{3} - 25 = \frac{75}{3} = \sigma^2 x$$
$$p[|x-5| \geq 4] \leq \frac{\sigma^2}{k^2} \quad \Rightarrow \quad p[|x-5| \geq 4] \leq \frac{25/3}{4^2} \quad \Rightarrow$$
$$p[|x-5| \geq 4] \leq 0.52$$

روش دوم

$$p[|x-5| \geq 4] = p[(x-5) \geq 4 \quad , \quad -(x-5) \geq 4] = p[x \geq 9, x \leq 1] = p[x \geq 9] + p[x \leq 1]$$
$$= \int_9^{10} \frac{1}{10} dx + \int_0^1 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10}(10-9) + \frac{1}{10}(1-0) = 0.2$$
$$p[|x-5| \geq 4] \leq 0.2$$

سؤال : چرا دو روش مساوی نشد

در فضای حدی از نامساوی چبی شف استفاده میشود

96) مثال

مدیر انباری تخمین میزند که از لحظه سفارش تا رسیدن جنس 8 روز طول میکشدlead time
انحراف معیار این تخمین 1.5 روز اســـت و از نحوه تابع توزیع lead time را نمیدانیم ، اگر حداقل با احتمال 8/9 بخواهیم جنس در انبار باشد چند روز قبل سفارش بدهیم
برای استفاده از حداقل یعنی علامت بزرگتر مساوی باید 1-8/9 را حساب کرد

$$E(x)=8 \quad , \quad \sigma x=1.5$$

$$p[|x-u_x|\geq k\sigma]\leq \frac{1}{k^2}$$

$$1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}=k^2 \quad \Rightarrow \quad k=3$$

$$p[|x-8|\leq 3*1.5]\geq \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad |x-8|\leq 3*1.5$$

$$x-8>0 \quad \Rightarrow \quad x-8\leq 3*1.5 \quad \Rightarrow \quad x\leq 12.5$$

$$x-8<0 \quad \Rightarrow \quad -(x-8)\leq 3*1.5 \quad \Rightarrow \quad x\geq 3.5$$

$$3.5\leq x\leq 12.5$$

توابع متغیر تصادفی :

اگر x متغیر تصادفی باشد آنگاه y=u(x) باشد y هم یک متغیر تصادفی است

$$y=u(x)=x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{y}$$

$$G(y)=f(Y\leq y)=p(x^2\leq y)=P(|x|\leq \sqrt{y})=p(-\sqrt{y}\leq x\leq \sqrt{y})$$

$$G(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)=F(x)\ \Big]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})$$

$$G(y)=\frac{dG(y)}{dy}=\frac{dF(\sqrt{y})}{dy}-\frac{dF(-\sqrt{y})}{dy}=\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}f(\sqrt{y})-\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}f(-\sqrt{y})$$

$$G(y)=\frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}-\frac{f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

97) مثال

اگر یک تابع توزیع بصورت ذیل باشد و $y = x^2$ باشد آنگاه تابع توزیع g(y) را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

حل :

چون x پیوسته و بین 1و 1- است پس $y = x^2$ پیوسته و بین 0 و 1 است

$$G(y) = p(Y \le y) = p(x^2 \le y) = p(-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y})$$

$$G(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \,\Big]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$$x = 1 \;\; y = 1 \,, \quad x = -1 \;\; y = 1 \,, \quad x = 0 \;\; y = 0$$

☜ ** قضیه حد مرکزی

1- اگر از یک جمعیت n عضوی با میانگین معلوم μ و واریانس معلوم σ^2 یک نمونه تصادفی n تایی $(n \succ 30)$ یکی یکی و با عمل جایگزینی انتخاب کنیم آنگاه میانگین نمونه ای یعنی $\bar{x}$ تقریبا دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{\bar{x}} = \mu$ و واریانس $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$ و انحراف معیار $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}$ خواهد بود

و متغیر تصادفی $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2 / n}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد میباشد

2- اگر از یک جمعیت نرمال با واریانس مجهول یک نمونه تصادفی n تایی با n<30 انتخاب کنیم آنگاه متغیر تصادفی

$t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2 / n}}$ دارای توزیع t با n-1 درجه آزادی است که در آن $\bar{x}$ میانگین نمونه و μ میانگین جمعیت و S انحراف معیار نمونه میباشد.

3- اگر در یک جمعیت دوجمله ای با احتمال پیروزی p یک نمونه تصادفی n تایی $(n \succ 30)$ یکی یکی انتخاب کنیم (در دو جمله ای همیشه با عمل جایگزینی است) آنگاه احتمال پیروزی در نمونه یعنی $\hat{p}$ تقریبا دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{\hat{p}} = E(\hat{p}) = p$ و واریانس $\sigma_{\hat{p}}^2 = \dfrac{p(1-p)}{n}$ خواهد بود

نکته : چون یک توزیع پیوسته به گسسته تقریب زده میشود در موارد کوچکتر نصف واحد یعنی $\dfrac{1}{2n}$ اضافه و در موارد بزرگتر نصف واحد یعنی $\dfrac{1}{2n}$ اضافه کم میشود

نکته : آزمایش برنولی مستقل از هم است یعنی با جایگزینی است

☜ حالت دوم توزیع نرمال :

تعداد جمعیت نا مشخص – میانگین جمعت مشخص μ – انحراف معیار جمعیت مشخص σ – تعداد نمونه مشخص n - یک سوال احتمال m از نمونه

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \qquad p(\bar{x} < m) = p\left(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2 / n}} < \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2 / n}}\right) \qquad p(\bar{x} < m) = p\left(z < \frac{m - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2 / n}}\right)$$

مثال 98)

کارخانه لامپ سازی ادعا میکند که طول عمر لامپهایش 1280 با انحراف معیار 150 است از این کارخانه یک نمونه 100 تایی لامپ انتخاب میکنیم احتمال اینکه این لامپها بیشتر از 1300 عمر کند چقدر است؟

از جمعیتی با میانگین $\mu = 1280$ و $\sigma = 150$ یک نمونه تصادفی $n = 100$ تایی انتخاب میکنیم احتمال اینکه $p(\bar{x} > 1300)$ باشد چقدر است

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$
$$\bar{x} \sim N(1280, 150^2/100)$$
$$p(\bar{x} > 1300) = p(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sqrt{\sigma^2 / n}} > \frac{1300 - 1280}{\sqrt{150^2 / 100}})$$
$$p(z > 1.33) = 1 - p(z \le 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

مثال 99)

کارخانه لامپ سازی ادعا میکند که طول عمر لامپهایش 1280 با انحراف معیار 150 است از این کارخانه یک نمونه 25 تایی لامپ انتخاب میکنیم احتمال اینکه این لامپها بیشتر از 1300 عمر کند چقدر است؟

از جمعیتی با میانگین $\mu = 1280$ و $s = 150$ یک نمونه تصادفی $n = 25$ تایی انتخاب میکنیم احتمال اینکه $p(\bar{x} > 1300)$ باشد چقدر است

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2 / n}} \sim t(24)$$
$$p(\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2 / n}} > \frac{1300 - 1280}{\sqrt{150^2 / 25}})$$
$$p(t > 0.67) = 1 - p(z \le 0.67) \text{ازجدول}$$
$$t_p(24) = 0.67 \quad \Rightarrow p = 0.74 \quad \Rightarrow p(t > 0.67) = 1 - 0.74 = 0.26$$

موارد فوق ازجدول توزیع t با n-1=25-1=24 درجه آزادی و از داخل جدول برای 0.67 و در سطر اول جدول عدد احتمال 0.74 حاصل شد

حالت سوم توزیع نرمال :

احتمال در حمعیت مشخص p – تعداد نمونه مشخص n - یک سوال احتمال m از نمونه

$$P(\hat{p}<m)=P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}<\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \qquad P\left(z<\frac{m-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

100)

101) مثال

کارخانه تلوزیون سازی 2٪ از تولیداتش معیوب است اگر یک محموله 400 تایی از این کارخانه خریداری شود

الف) احتمال اینکه 3٪ یا بیشتر از تولیداتش معیوب باشد چقدر است

ب) احتمال اینکه 2٪ یا کمتر از تولیداتش معیوب باشد چقدر است

$$\frac{1}{2n}=\frac{1}{2*400}=0.00125$$

$$P(\hat{p}\geq 0.03)=P(\hat{p}\geq 0.03-0.00125)$$

$$P(\hat{p}>0.02875)=$$

$$P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}>\frac{0.02875-0.02}{\sqrt{\frac{0.02*0.98}{400}}}\right)$$

$$p(z>1.25)$$

$$P(\hat{p}\leq 0.02)=P(\hat{p}<0.02+0.00125)=P(\hat{p}<0.02125)$$

$$P\left(z<\frac{0.02125-0.02}{\sqrt{\frac{0.02*0.98}{400}}}\right)=P(z<0.18)=0.5714$$

☜ ** برآورد فاصله ای

سطح زیر منحنی 1 یک است اگر $\alpha/2$ در سمت راست منحنی و $\alpha/2$ در سمت چپ منحنی باشد بنابراین $1-\alpha$ درصد مطمئن هستیم که Z بین $Z_{\alpha/2}$ و $-Z_{\alpha/2}$ است

$$P(-|Z_{\alpha/2}|< Z <|Z_{\alpha/2}|) = 1-\alpha$$

$$P(-|Z_{\alpha/2}|< \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} <|Z_{\alpha/2}|) = 1-\alpha$$

$$P(\bar{x}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\sigma^2/n} < \mu < \bar{x}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\sigma^2/n}) = 1-\alpha$$

بنابراین $1-\alpha$ درصـــد مطمئن هســـتیم میانگین جمعیت بین $\bar{x}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}$ و $\bar{x}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}$ است

مثلاً برای جمعیت دو جمله ای

$$P(\hat{p}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} < p < \hat{p}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}) = 1-\alpha$$

نکته : اگر در مواردی σ معلوم نبود از S استفاده میکنیم

☜ حل مسائل برآورد فاصله ای

برنولی : در مســئله یک احتمال در نمونه مشــخص میشــود $\hat{p}$ و یک عدد بعنوان فاصله اطمینان میدهند که بعنوان $1-\alpha$ در نظر گرفته ســپس $\alpha/2$ محاسـبه و از جدول Z مربوط به $\alpha/2$ پیدا کرده آنگاه جواب مســئله بصورت زیر است

$$\hat{p}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$$
$$\hat{p}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$$

نرمال : در مســئله یک میانگین $\bar{x}$ و انحراف معیار از نمونه σ مشـخص میشـود و یک عدد بعنوان فاصله اطمینان میدهند که بعنوان $1-\alpha$ در نظر گرفته ســـپس $\alpha/2$ محاســـبه و از جدول Z مربوط به $\alpha/2$ پیدا کرده آنگاه جواب مسئله بصورت زیر است

$$\bar{x}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\sigma^2/n}$$
$$\bar{x}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\sigma^2/n}$$

102) مثال

یک نمونه 100 نفری از رای دهندگان انتخابات ریاســـت جمهوری انتخاب شـــدند 59 نفر اظهار داشـــتند که بنفع کاندید A رای میدهند فاصله اطمینان ٪95 برای نسبت افرادی که به کاندید A رای میدهند حساب کنید

$1-\alpha = 0.95 \qquad \alpha/2 = 0.025$

$Z_{0.025} = 1.96 \qquad n = 100 \qquad \hat{p} = 59/100 = 0.59$

$$P(\hat{p}-|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} < p < \hat{p}+|Z_{\alpha/2}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}) = 1-\alpha$$

$0.59-1.96\sqrt{0.59*0.41/100}$ و $0.59+1.96\sqrt{0.59*0.41/100}$

0.496 و 0.684

بنابراین میتوان با اطمینان ٪95 اظهار داشت که بیش از ٪50 مردم به کاندید A رای میدهند

☜ ** آزمون فرضها :

میخواهیم بحث قبول یا رد فرض صفر را بررسی کنیم

فرض H_α مشابه خواسته مسئله در نظر میگیریم و فرض H_0 را مساوی آن مقدار در مسئله قرار میدهیم

1- اگر در فرض H_α علامت کوچکتر بود آنگاه اگر $Z<-|Z_\alpha|$ بود فرض H_0 را رد میکنیم و پذیرای فرض مقابل یعنی H_α میشویم وگرنه اعلام میکنیم دلیلی بر رد H_0 نداریم

2- اگر در فرض H_α علامت بزرگتر بود آنگاه اگر $Z>+|Z_\alpha|$ بود فرض H_0 را رد میکنیم و پذیرای فرض مقابل یعنی H_α میشویم وگرنه اعلام میکنیم دلیلی بر رد H_0 نداریم

☜ حل مسائل آزمون فرضها

نرمال : در مسئله میانگین جمعیت $\bar{x}$ و انحراف معیار جمعیتS و میانگین ادعا μ_0 و یک عدد بعنوان α در نظر گرفته سپس از جدول Z مربوط به α پیدا کرده و یک Z از $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$ در جدول بدست آورده و آنگاه جواب مسئله طبق شرایط فوق مقایسه میکنیم

برنولی : در مسئله احتمال نمونه p و میانگین ادعا p_0 و یک عدد بعنوان α در نظر گرفته سپس از جدول Z مربوط به α پیدا کرده و یک Z از $\frac{p-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ در جدول بدست آورده و آنگاه این دو Z طبق شرایط مسدله و شرایط آزمون در فوق مقایسه میکنیم

103) مثال

در آزمایش طول قامت 50 کودک میانگین 89.2 سانتیمتر و انحراف معیار 15.5 سانتیمتر میباشد آیا میتوان ادعا کرد طول قامت کودکان کمتر از 90 سانتیمتر است (هر وقت آلفا مشخص ندادند مقدارش 0.05 در نظر میگیریم)

$n=50 \quad \bar{x}=89.2 \quad s=15.5$

$H_a: \ \mu<90$

$H_0: \mu=90$

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{s^2}{n}}=\sqrt{\frac{15.5^2}{50}} \qquad Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{89.2-90}{\sqrt{\frac{15.5^2}{50}}}=-0.365$$

$Z_\alpha=Z_{0.05}=m \Leftrightarrow p(z\le m)=1-0.05=0.95$

$\text{from table} \Rightarrow m=1.645=Z_{0.05}=Z_\alpha$

$(Z=-0.365)<(-Z_\alpha=-1.645)$ غلط

چون $Z<-Z_\alpha$ نیست اعلام میکنیم دلیلی بر رد H_0 نداریم یعنی نمیتوان فرض H_α را پذیرفت پس نمیتوان گفت قامت کوچکتر از 90 است

104) مثال

لامپهای ساخت کارخانه ای با انحراف معیار 142 ساعت در یک نمونه 100 تایی میانگین عمرشان 1280 ساعت شد صاحب کارخانه ادعا میکند که با همین اطلاعات میانگین عمر لامپهای ای کارخانه از 1200 ساعت بیشتر است آیا میتوان ادعای او را قبول یا رد کرد ؟ (هر وقت آلفا مشخص ندادند مقدارش 0.05 در نظر میگیریم)

$n = 100 \qquad \bar{x} = 1280 \qquad s = 142$

$H_a: \ \mu > 1200$

$H_0: \mu = 1200$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \sqrt{\frac{142^2}{100}} \qquad Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{1280 - 1200}{\sqrt{\frac{142^2}{100}}} = 5.63$$

$Z_\alpha = Z_{0.05} = m \Leftrightarrow p(z \le m) = 1 - 0.05 = 0.95$

$\text{from table} \Rightarrow m = 1.645 = Z_{0.05} = Z_\alpha$

$(Z = 5.63) > (+Z_\alpha = +1.645)$ صحیح

چون $Z > +Z_\alpha$ میباشد فرض H_0 را رد میکنیم و پذیرای فرض مقابل یعنی H_α میشویم یعنی بله ادعای صاحب کارخانه میتواند درست باشد

105) مثال

صاحب یک کارخانه داروسازی ادعا میکند که داروی ضد حساسیت این کارخانه در مورد بیش از 90٪ حساس در مدت 8 ساعت پس از مصرف دارو نتیجه مثبت میدهد

یک نمونه 200 نفری آدمهای حساس انتخاب کردیم و دارو را استفاده نمودند و 160 نفر بهبود یافتند آیا این داده ها دلیل کافی ارائه میدهد که ادعای صاحب کارخانه غلط است ؟ ($\alpha = 0.01$)

توجه شود که چون صورت مسئله خلاف نظر صاحب کارخانه خواسته علامت کوچکتر استفاده میشود

$n = 200 \qquad \hat{p} = 160/200 = 0.8 \qquad s = 200 * 0.8 * (1 - 0.8)$

$H_a: \ \mu < 0.9$

$H_0: \mu = 0.9$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{200}} \qquad Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{0.8 - 0.9}{\sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{200}}} = -4.72$$

$Z_\alpha = Z_{0.01} = m \Leftrightarrow p(z \le m) = 1 - 0.01 = 0.99$

$\text{from table} \Rightarrow m = 2.33 = Z_{0.01} = Z_\alpha$

$(Z = -4.72) < (-Z_\alpha = -2.33)$ صحیح

چون $Z < -Z_\alpha$ میباشد فرض H_0 را رد میکنیم و پذیرای فرض مقابل یعنی H_α میشویم یعنی بله ادعای صاحب کارخانه میتواند غلط باشد

مدل مهره و جعبه

اگر N جعبه متمایز داشته باشیم و اگر R مهره داشته باشیم و بخواهیم این R مهره درون جعبه قرار دهیم حالتهای زیر بوجود میاید

1- مهره متمایز مهره مکرر مجاز

$$C(N,R) = N*N*N......*N = N^R$$

در این حالت اهمیتی ندارد که R < N باشد یا نباشد

106) مثال

سه ظرف رنگی مشخص سبز و قرمز و آبی داریم و دو مهره A و B به چند طریق میتوان دو مهره درون سه ظرف چید که مهره مکرر مجاز باشد

$$C(3,2) = 3^2 = 9$$

سبز	AB	–	-	A	B			A	B
قرمز	–	AB	–	B	A	A	B		
آبی	-	–	AB	-	-	B	A	B	A
-	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2- مهره متمایز مهره مکرر غیرمجاز

$$C(N,\overline{R}) = N*(N-1)*(N-2)......*(N-R+1) = \frac{N!}{(N-R)!}$$

این حالت همان ترتیب میباشد

در این حالت باید R <= N باشد

107) مثال

سه ظرف رنگی مشخص سبز و قرمز و آبی داریم و دو مهره A و B به چند طریق میتوان دو مهره درون سه ظرف چید که مهره مکرر غیر مجاز باشد

$$C(3,\overline{2}) = P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

سبز	A	B			A	B			
قرمز	B	A	A	B					
آبی	-	-	B	A	B	A			
-	1	2	3	4	5	6	-	-	-

☜ 3- مهره غیرمتمایز مهره مکرر غیرمجاز

$$C(\overline{N},\overline{R})=\binom{N}{R}=\frac{N!}{(N-R)!\,R!}$$

این حالت شبیه حالت ترکیب میباشد

در این حالت باید $N =< R$ باشد

108) مثال

سه ظرف رنگی مشخص سبز و قرمز و آبی داریم و دو مهره A و A به چند طریق میتوان دو مهره درون سه ظرف چید که مهره مکرر غیر مجاز باشد

$$C(\overline{3},\overline{2})=\frac{3!}{(3-2)!2!}=3$$

سبز	A		A						
قرمز	A	A							
آبی	-	A	A						
-	1	2	3	-	-	-	-	-	-

☜ 4- مهره غیرمتمایز مهره مکرر مجاز

$$C(\overline{N},R)=\binom{N+R-1}{R}=\binom{N+R-1}{N-1}$$

در این حالت میتواند $R > N$ باشد

شبیه اینکه بگوییم N جعبه بیکدیگر میچسبانیم که N+1 خط عمودی تشکیل میدهد و R مهره مشابه درون این جعبه ها جا دهیم چون خط اول و آخر ثابت است پس N-1 خط عمودی وجود دارد و R مهره مشابه درون آنها بچینیم

109) مثال

سه ظرف رنگی مشخص سبز و قرمز و آبی داریم و دو مهره A و A به چند طریق میتوان دو مهره درون سه ظرف چید که مهره مکرر مجاز باشد

$$C(\overline{3},2)=\binom{3+2-1}{2}=\frac{4!}{(4-2)!2!}=6$$

سبز	A		A	AA					
قرمز	A	A			AA				
آبی	-	A	A			AA			
-	1	2	3	4	5	6	-	-	-

مثالهایی از احتمال شرطی

110) مثال

تاس را پرتاب میکنیم مشاهده میشود عدد زوج است احتمال اینکه بر 3 بخش پذیر باشد چقدر است

روش اول (کلی)

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{2,4,6\}$$
$$A = \{3,6\}$$
$$A \cap B = \{6\}$$
$$p(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

روش دوم (هرچند برای این مثال این روش ساده تر است ولی برای مسائل پیچیده این روش مناسب نیست)

$B = \{2,4,6\}$ $\qquad B_{3x} = \{6\}$

کل اعداد زوج سه تا است و یکی از آن سه تا بر سه بخش پذیر است

$$P(B_{3x}) = \frac{1}{3}$$

تمرین

تاس را پرتاب میکنیم مشاهده میشود بر 3 بخش پذیر است احتمال اینکه عدد زوج باشد چقدر است؟(1/2)

111) مثال

ظرفی محتوی 5 گوی قرمز و 7 گوی سیاه است

از درون ظرف دو گوی را یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم

الف) احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است

ب) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد چقدر است

الف) ترتیب اهمیت دارد

$$P(R1 \cap B2) = P(R1).P(B2 \mid R1) = (5/12).(7/11)$$

ب) ترتیب اهمیت ندارد   چون در حالت ب دو پیش آمد ناسازگارند با هم جمع میشوند

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$
$$P[(R1 \cap B2) \cup (B1 \cap R2)] = P(R1 \cap B2) + P(B1 \cap R2) = P(R \cap B) + P(B \cap R) =$$
$$P(R).P(B \mid R) + P(B).P(R \mid B) = [(5/12).(7/11)] + [(7/12).(5/11)]$$

میتوانستیم یک حالت بدست آورده در 2 ضرب کنیم

ب) برای حالت ب میتوانستیم از فرمول ترکیب استفاده کنیم

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{7}{1}}{\binom{12}{2}}$$

112) مثال

ظرفی محتوی 5 گوی قرمز و 7 گوی سیاه است. از درون ظرف سه گوی را یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم. الف) احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه و گوی سوم قرمز باشد چقدر است. ب) احتمال اینکه دو گوی قرمز و یک گوی سیااه باشد چقدر است؟

الف) ترتیب اهمیت دارد

$$P(R1 \cap B2 \cap R3) = (5/12).(7/11).(4/10)$$

ب) ترتیب اهمیت ندارد چون در حالت ب دو پیش آمد ناسازگارند با هم جمع میشوند

$$P(RBR \text{ or } RRB \text{ or } BRR) = 3 * P(RBR) = 3.[(5/12).(7/11)].(4/10)]$$

ب) برای حالت ب میتوانستیم از فرمول ترکیب استفاده کنیم

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{7}{1}}{\binom{12}{3}}$$

مثال (113

یک سکه دو بار پرتاب میکنیم احتمال اینکه دفعه اول شیر و دفعه دوم خط بیاید چقدر است

چون دومی مستقل از اولی است

$$P(H \cap T) = P(H).P(T \mid H) = P(H).P(T) = (1/2).(1/2) = 1/4$$

مثال (114

میزی دارای 3 کشو است کشو اول 5 سکه طلا و 7 سکه نقره کشـو دوم دارای 3 سکه طلا و 3 سکه نقره کشـو سوم دارای 9 سکه طلا و 2 سکه نقره میباشد یک کشو بتصادف انتخاب و یک سکه بیرون کشیدیم مشاهده شد طلا است احتمال اینکه از کشو دوم باشد چقدر است

5G,7S 3G,3S 9G,2S

E1=پیش آمد انتخاب کشو اول E2=پیش آمد انتخاب کشو دوم E3=پیش آمد انتخاب کشو سوم

A=پیش آمد سکه طلا

$$P(E2 \downarrow A) = \frac{P(E2).P(A \downarrow E2)}{P(E1).P(A \downarrow E1) + P(E2).P(A \downarrow E2) + P(E3).P(A \downarrow E3)}$$

$$= \frac{(1/3)(3/6)}{(1/3)(5/12) + (1/3)(3/6) + (1/3)(9/11)} =$$

مثال (115

در هفته آینده بدلیل تعمیرات یک واحد از پنج واحد نیروگاهی در مدار است (خروج واحد یعنی خاموشی) پنج روز هفته آینده مناسبتهایی در سطح شهر است که اهمیت محاسبه احتمال خاموشی را نیاز داریم

در روز شنبه احتمال خروج واحد 70٪ در روز یکشنبه و سه شنبه احتمال خروج واحد 40٪

در روز دوشنبه و چهار شنبه احتمال خروج واحد 20٪ میباشد

در یک روز در هفته آینده مشاهده شد خاموشی بوجود آمده احتمال اینکه این روز دوشنبه باشد چقدر است

$$P(E0) = P(E1) = \ldots\ldots = 1/5 = 0.2$$

$$P(E2 \downarrow A) = \frac{P(E2).P(A \downarrow E2)}{P(E0).P(A \downarrow E0) + P(E1).P(A \downarrow E1) + P(E2).P(A \downarrow E2) + P(E3).P(A \downarrow E3) + P(E4).P(A \downarrow E4)}$$

$$= \frac{(0.2)(0.2)}{(0.2)(0.7) + (0.2)(0.4) + (0.2)(0.2) + (0.2)(0.4) + (0.2)(0.2)} =$$

کامپیوتر و توابع اکسل و آمار و احتمالات

=AVERAGE(محدوده)	تابع میانگین حسابی
=COMBIN(تعداد موفقیت,تعدادآزمایش)	ترکیب
=BINOMDIST(تعدادموفقیت , تعداد آزمایش, احتمال موفقیت , مقدار منطقی)	تابع محاسبه دو جمله ای

116) مثال :

پرتاب یک سکه دو احتمال 50٪ را بدنبال دارد اگر این سکه 30 بار پرتاب شود
کل تعداد حالات که 12 شیر حاصل شود چقدر است

$$\binom{30}{12} = \frac{30!}{(30-12)!12!} = 86493225$$

=COMBIN(30,12)= 86493225

احتمال اینکه 12 بار شیر بیاید چقدر است (مقدار منطقی FALSE)

$$P(x=12) = \binom{30}{12} 0.5^{12} 0.5^{30-12} = 0.08$$

=BINOMDIST(12,30,0.5,FALSE)=0.08

احتمال اینکه حداکثر 12 بار شیر بیاید چقدر است(مقدار منطقی TRUE)

$$P(x \le 12) = \sum_{x=0}^{12} \binom{30}{x} 0.5^{x} 0.5^{30-x} = 0.18$$

=BINOMDIST(12,30,0.5,TRUE)=0.18

☜

=intercept(مجموعه وابسته , مجموعه مستقل)	تابع محاسبه ضریب همبستگی

117) مثال

ضریب همبستگی بین دو سری اعداد زیر بدست آورید

x = 1,3,4,6,8,9,11,14
y = 1,2,4,4,5,7, 8, 9

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad , \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \Rightarrow y = a + bx$$

y = a+bx
b = 7/11=0.636
Xavg=7
Yavg=5
a = 5-(7/11)*7=6/11
y = 6/11+(7/11)x
y=0.545+0.637x

اگر سری مستقل x را از a1 تا a8 نوشته و سری وابسته y را از b1 تا b8 آنگاه

=intercept(b1:b8; a1:a8)=0.545

☜

=confidence(آلفا , انحراف معیار , اندازه نمونه)	تابع محاسبه فاصله میانگین جامعه

118) مثال

با آلفا 5٪ و انحراف معیار 2.5 و اندازه نمونه 50 فاصله اطمینان میانگین جامعه را حساب کنید
یک منهای آلفا بیانگر 95٪ اطمینان است

=confidence(0.05,2.5,50)=0.69

☜

=critbinom(تعداد تلاشها , احتمال موفقیت , آلفا)	تـابع محاســبه توزیع دو جمله ای تجمعی مشروط

119) مثال

سـکه ای را 10 بار پرتاب میکنیم احتمال شیر در هر بار 50٪ میباشد برای اینکه با اطمینان 75٪ بگوییم شیر بیاید حداقل چند پرتاب کنیم

=critbinom (10,0.5,0.75)=6

☜

=var (محدوده)	تابع محاسبه واریانس نمونه

1,3,4,6,8,9,11,14
=var(1,3,4,6,8,9,11,14)=18.85

☜

=varp (محدوده)	تابع محاسبه واریانس جامعه

1,3,4,6,8,9,11,14
=varp(1,3,4,6,8,9,11,14)=16.5

120) مثال کمک مثال 48

ظرفی محتوی پنج گوی 3 گوی قرمز و 2 گوی سیاه است تمام گویها شماره گذاری شده است
ازدرون ظرف یک گوی را بیرون میاوریم
الف) احتمال قرمز بودن؟ ب) احتمال قرمز شماره 2 بودن؟
از درون ظرف دو گوی را یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم
ج)احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است
د) احتمال گوی اول قرمز شماره2 و گوی دوم سیاه شماره 1 باشد
ه) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد
و) احتمال اینکه یک گوی قرمز شماره 2 و یک گوی سیاه شماره 1 باشد
از درون ظرف یک گوی بیرون آورده و به آن نگاه کرده بداخل ظرف باز میگردانیم سپس گوی دوم را بیرون میاوریم و نگاه میکنیم (با جایگزینی)
ح)احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است
ط) احتمال گوی اول قرمز شماره2 و گوی دوم سیاه شماره 1 باشد
ی) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد
ک) احتمال اینکه یک گوی قرمز شماره 2 و یک گوی سیاه شماره 1 باشد

بدون جایگزینی
الف) احتمال قرمز بودن

$S = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A = \{R1, R2, R3\}$

$P = 3/5$

ب)احتمال قرمز بودن شماره 2

$S = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A = \{R2\}$

$P = 1/5$

ج)از درون ظرف دو گوی را یکی یکی بدون جایگزینی بیرون میاوریم

S={G1G2,G1G3,G1B1,G1B2 G2G1,G2G3,G2B1,G2B2
G3G1,G3G2,G3B1,G3B2 B1G1,B1G2,B1G3,B1B2 B2G1,B2G2,B2G3,B2B1
}
S=20

احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است
از روی دو مجموعه فوق کلیه حالتهای **GB**

A={G1B1,G1B2,G2B1,G2B2,G3B1,G3B2}
A=6
P(A)=(A/S)=6/20=3/10

روش دیگر

$S1 = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A1 = \{R1, R2, R3\}$

$P(R) = 3/5$

$S2 = \{R1, R2, B1, B2\}$

$A2 = \{B1, B2\}$

$P(B) = 2/4$

$$OR \quad P(B) = P(B \mid R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B).P(R)}{P(R)} = \frac{(2/4).(3/5)}{3/5} = 2/4$$

P(RandB)=(3/5)(2/4)=6/20=3/10

د) احتمال اولی قرمز شماره 2 دومی سیاه شماره 1 باشد

از روی دو مجموعه فوق

A={R2B1}
A=1
P(A)=A/S=1/20=0.05

راه دیگر

P(R2andB1)=(1/5).(1/4)=1/20

ه) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد

از روی مجموعه فوق

A=12
A={R1B1,R1B2,R2B1,R2B2,R3B1,R3B2,B1G1,B1G2,B1G3,B2G1,B2G2,B2G3}
P(A)=A/S=12/20=0.6

راه دیگر

P(RandB) U P(BandR)=(3/5)(2/4)+(2/5)(3/4)=12/20

روش دیگر (ه)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$P[(R \cap B) \cup (B \cap R)] = P(R \cap B) + P(B \cap R) = P(R \cap B) + P(B \cap R) =$

$P(R).P(B \mid R) + P(B).P(R \mid B) = [(3/5).(2/4)] + [(2/5).(3/4)]$

میتوانستیم یک حالت بدست آورده در 2 ضرب کنیم

روش دیگر (ه) برای حالت ه میتوانستیم از فرمول ترکیب استفاده کنیم

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}$$

و) احتمال یک گوی قرمز شماره 2 و یک گوی سیاه شماره 1 باشد

از روی مجموعه فوق

A={R2B1,B1R2}
A=2
P(A)=A/S=2/20=0.1

روش دیگر

P(R2andB1) U P(B1andR2) = (1/5).(1/4) + (1/5).(1/4)=2/20=1/10

با جایگزینی

از درون ظرف دو گوی را یکی یکی با جایگزینی بیرون میاوریم

S={ G1G1,G1G2,G1G3,G1B1,G1B2 G2G1,G2G2,G2G3,G2B1,G2B2
G3G1,G3G2,G3G3,G3B1,G3B2 B1G1,B1G2,B1G3,B1B1,B1B2
B2G1,B2G2,B2G3,B2B1,B2B2 }

ز)احتمال اینکه گوی اول قرمز و گوی دوم سیاه باشد چقدر است

از روی مجموعه فوق

A={G1B1,G1B2,G2B1,G2B2,G3B1,G3B2 }
A=6
P(A)=6/25

روش دیگر

$S1 = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A1 = \{R1, R2, R3\}$

$P(R) = 3/5$

$S2 = \{R1, R2, R3, B1, B2\}$

$A2 = \{B1, B2\}$

$P(B) = 2/5$

$$OR \quad P(B) = P(B|R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B).P(R)}{P(R)} = \frac{(2/5).(3/5)}{3/5} = 2/5$$

P(RandB)=(3/5)(2/5)=6/25

د) احتمال اولی قرمز شماره 2 و دومی سیاه شماره 1 باشد

A={R2B1}
A=1
P(A)=A/S=1/25=0.04

روش دیگر

P(R2andB1)=(1/5).(1/5)=1/25

ه) احتمال اینکه یک گوی قرمز و یک گوی سیاه باشد

A={G1B1,G1B2,G2B1,G2B2,G3B1,G3B2,B1G1,B1G2,B1G3,B2G1,B2G2,B2G3}
A=12
P(A)=A/S=12/25=0.48

روش دیگر

P(RandB) U P(BandR)=(3/5)(2/5)+(2/5)(3/5)=12/25

روش دوم ه

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$P[(R \cap B) \cup (B \cap R)] = P(R \cap B) + P(B \cap R) = P(R \cap B) + P(B \cap R) =$

$P(R).P(B|R) + P(B).P(R|B) = [(3/5).(2/5)] + [(2/5).(3/5)]$

میتوانستیم یک حالت بدست آورده در 2 ضرب کنیم

و) احتمال یک گوی قرمز شماره 2 یک گوی سیاه شماره 1 باشد

A={R2B1,B1R2}
A=2

P(A)=A/S=2/25=0.08

روش دیگر

P(R2andB1) U P(B1andR2) = (1/5).(1/5) + (1/5).(1/5)=2/25=0.08

☜ فرمولهای احتمال در مجموعه ها

$P(\Phi) = 0$

$P(A') = 1 - P(A)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$IF \quad A \cap B = \Phi \qquad P(AandB) = P(A).P(B)$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$IF \quad B \subset A \quad \mathrm{P(A - B) = P(A) - P(B)}$

☜ نمونه سوال و حل آنها)

121) مثال

در جدول زیر نمرات 19 نفر از داتشجویان و فراوانی آنها داده شده.

الف – میانه چه عددی است   ب- نما چه عددی است   ج – صدک 72 چقدر است

د- میانگین چه مقدار است (دورقم اعشار)   ه – واریانس و انحراف معیار چقدر است (دورقم اعشار)

9	11	12	13	14	16	18	X_i	داده
1	1	2	4	5	4	2	f_i	فراوانی

حل : داده ها از چپ به راست منظم و مرتب میکنیم

18	16	14	13	12	11	9	X_i	داده
2	4	5	4	2	1	1	f_i	فراوانی
19	17	13	8	4	2	1	Fi	فراوانی تجمعی

نما – نما (مود) داده ای که fi آن از دیگر داده ها دارای فراوانی بیشتر است در اینجا داده ه M=14 میباشد

میانه – باید وسط صف منظم داده ها مشخص کنیم چون داده ها دارای فراوانی است نوشتن تمام آنها (نوشتن تمام 19 داده) جدول بزرگتری میخواهد که بهتر است از فرمول استفاده کنیم

$\frac{n}{2} = \frac{\sum f_i}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$ ➔ در سطر Fi ➔ 9.5+ ➔ Fi= 13 ➔ m=14

میانه 14 است و در طبقه i=3 است اگر داده ها پیوسته بود از فرمول زیر استفاده میکردیم

که در آن np=19*(1/2)=8.5 میشد و Cفاصله طبقات و Liکران پایین میباشد

$$Q = L_i + \frac{np-F_{i-1}}{f_i} * C=$$

محاسبه میانگین

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i} = \frac{(18*2)+(16*4)+(14*5)+(13*4)+(12*2)+(11*1)+(9*1)}{1+1+2+4+5+4+2} = \frac{266}{19}$$
$$= 14$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma^2 = \\ = \frac{(9-14)^2*1+(11-14)^2*1+(12-14)^2*2+(12-14)^2*2+(13-14)^2*4+(14-14)^2*5+(16-14)^2*4+(18-14)^2*2}{1+1+2+4+5+4+2} \\ = 4.95$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.95} = 2.22$$

بنابراین میانگین 14 واریانس 4.95 و انحراف معیار 2.22 میباشد

122) مثال

میانگین موجودی آب زیر زمین شـیراز در چند سـال گذشته بصورت زیر روند کاهشی داشته است پیش بینی سال 93 چقدر است.

1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1393
123000	118000	120000	116000	116000	115000	112000	95000	?

حل : ابتدا داده ها را مرتب و ساده ترمیکنیم

مشخص است که سال داده متغیر و مصرف داده وابسته است سال = X و مصرف =Y

X	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1393
Y	123000	118000	120000	116000	116000	115000	112000	95000	?

میتوان از داده Xعددی را کم کرد همه X را از 1388 که داده وسـطیX است کم میکنیم تا ضرب و تقسیم های بعدی راحت شود

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
Y	123	118	120	116	116	115	112	95	?
I	1	2	3	4	5	6	7	8	

تعداد داده که x و y مشخص دارند n=8 میباشد

									جمع	میانگین
X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	-4	-0.5
Y	123	118	120	116	116	115	112	95	915	114.4
X*y	-492	-354	-240	-116	0	115	224	285	-578	
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	44	

$y = a + bx$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}$$

$\bar{y} = a + b\bar{x}$ ➔ $\bar{y} = \frac{123+118+\cdots..+95}{8} = \frac{915}{8} = 114.4$

$\bar{x} = \frac{-4-3+\cdots..+2+3}{8} = \frac{-4}{8} = -0.5$ $\qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}$$

$$= \frac{[(-4*123)+(-3*118)+(-2*120)+\cdots+(2*112)+(3*95)] - \frac{(-4-3-2-\cdots.+3)(123+118+..+112+95)}{8}}{[(-4)^2+(-3)^2+\cdots+(2)^2+(3)^2] - \frac{(-4-3-2\ldots+2+3)^2}{8}}$$

$$b = \frac{-578 - \frac{(-4)*(915)}{8}}{44 - \frac{(-4)^2}{8}} = \frac{-120.5}{42} = -2.87$$

$\bar{y} = a + b\bar{x}$ ➔ 114.375=a+(-2.87)*(-0.5) ➔ a=112.94

$y = a + bx$ ➔ $y = 112.94 - 2.87x$

1393-1388=5   X=5 ➔ $y = 112.94 - 2.87x$ ➔ y=98.5   در سال 1393 مصرف 98.5 میباشد

123) مثال

شرکتی ده (10) کامپیوتر دارد 2 کامپیوتر معیوب و قابل بازسازی نیست و 5 کامپیوتر معیوب ولی قابل تعمیر است و بقیه سالم است 3 کامپیوتر میخریم محاسبه کنید موارد ذیل را

الف) احتمال اینکه هر 3 کامپیوتر سالم باشد؟. ب) احتمال اینکه هر 3 کامپیوتر معیوب باشد؟

ج) احتمال اینکه هر 3 کامپیوتر معیوب و قابل تعمیر باشد؟

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال برای کامپیوتر سالم بنویسید و نمودار رسم کنید

الف)هر سه کامپیوتر سالم (G=سالم3تا -- B=معیوب7تا (2+5) -- E=5معیوب قابل تعمیر --F=2 معیوب غیر قابل تعمیر

در این سوالات ترتیب مهم نیست پس فرمول کلی ترکیب مینویسیم **(بدون جایگزینی و بدون ترتیب)**

$$P_{GGG}=\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{3!}{3!\,(3-3)!}*\frac{7!}{0!\,(7-0)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}}=\frac{1*1}{120}=\frac{1}{120}$$

ب) هر سه کامپیوتر معیوب

$$P_{BBB}=\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{3!}{0!\,(3-0)!}*\frac{7!}{3!\,(7-3)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}}=\frac{1*35}{120}=\frac{35}{120}$$

ج) هر سه کامپیوتر معیوب قابل تعمیر باشد

$$P_{EEE}=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{3!}{0!\,(3-0)!}*\frac{2!}{0!\,(2-0)!}*\frac{5!}{3!\,(5-3)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}}=\frac{1*1*10}{120}=\frac{10}{120}$$

د) تابع ها   کامپیوترهای سالم بتعداد 0 و 1 و 2 و 3 میتواند باشد

$$P_{BBB}=\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1*35}{120}=\frac{35}{120}\quad ;;\quad P_{GBB}=\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3*21}{120}=\frac{63}{120}\quad ;;\quad P_{GGB}=\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3*7}{120}=\frac{21}{120}$$

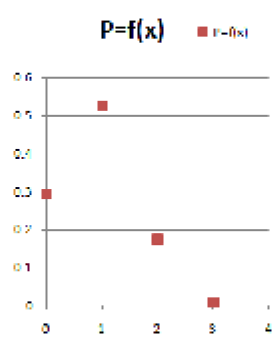
$$P_{GGG}=\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{1*1}{120}=\frac{1}{120}$$

X	0	1	2	3
P=f(x)	35/120	63/120	21/120	1/120
F(x)	35/120	98/120	119/120	120/120

****

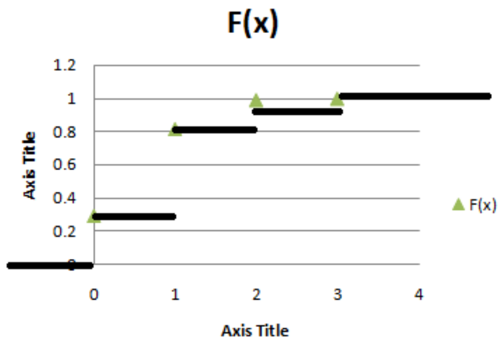
تابع چگالیP=f(x)

X	0	1	2	3
P=f(x)	0.292	0.525	0.175	0.008
F(x)	0.292	0.817	0.992	1.000



****

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty \le x < 0 \\ \frac{35}{120} & 0 \le x < 1 \\ \frac{98}{120} & 1 \le x < 2 \\ \frac{119}{120} & 2 \le x < 3 \\ \frac{120}{120} & 3 \le x < +\infty \end{cases}$$



تابع توزیع احتمال F(x)

****

نکته 1 ⁕ اگر سوال این بود که احتمال اینکه از این سه کامپیوتر دوتا سالم و یکی معیوب باشد

(بدون جایگزینی و بدون ترتیب)

$$P_{GBG}=P_G*P_B*P_G=\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{21}{120}$$

یا از این فرمول هم میشود

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

که در صورت عدم وابستگی و ناسازگاری نوبت ها میتوان نوشت (بدون جایگزینی = بدون وابستگی)

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)$$
$$P(SSB\cup SBS\cup BSS)=P(SSB)+P(SBS)+P(BSS)$$
$$=\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)+\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)=3*\frac{3*2*7}{10*9*8}=\frac{21}{120}$$

نکته 2 ⁕ اگر سوال این بود که سه کامپیوتر را بصورت یک به یک خارج نموده وپس از مشخص شدن سلامتی و معیوب بودن – آنگاه کامپیوتر دوم خارج میکردیم و .... – آنگاه احتمال اینکه از این سه کامپیوتر بترتیب کامپیوتر اولی سالم و دومی معیوب و کامپیوترسومی سالم باشد

(بدون جایگزینی و با ترتیب)

در این حالت در هر نوبت یک کامپیوتر داریم و از کامپیوترها موجود برای این یک کامپیوتر احتمال را محاسبه میکنیم

در نوبت اول 10 کامپیوتر داریم احتمال یک کامپیوتر سالم را نوشته و در نوبت دوم یک کامپیوتر سفید کم شده بنابراین 9 کامپیوتر باقیمانده است و احتمال یک کامپیوتر معیوب را نوشته و در نوبت آخر یک کامپیوتر سیاه هم کسر شده و 8 کامپیوتر باقیمانده و احتمال یک کامپیوتر سفید را حساب میکنیم.

$$P_{1G-2B-3G}=P_{1G}*P_{2B}*P_{3G}=\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{0}}{\binom{10}{1}}*\frac{\binom{2}{0}\binom{7}{1}}{\binom{9}{1}}*\frac{\binom{2}{1}\binom{6}{0}}{\binom{8}{1}}=\frac{7}{120}$$

یا از این روش هم میشود

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad ==> P(A\cap B)=P(B).P(A|B)=P(A).P(B|A)$$

که در صورت عدم وابستگی و ناسازگاری نوبت ها میتوان نوشت (اگر هر نوبت را از نوبت قبلی تفکیک کنیم بدون وابستگی میشود)

$$P(A\cap B)=P(B).P(A|B)=P(B).P(A)$$
$$P(1G\cap 2B\cap 3G)=P(1G).P(2B).P(3G)=\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{7}{120}$$

نکته 3 ⁕ اگر سوال این بود که هر بار که مهره را بر میداریم به آن نگاه کرده و مجددا به داخل ظرف میانداختیم احتمال اینکه از این سه کامپیوتر بترتیب کامپیوتر اولی سالم و دومی معیوب و کامپیوترسومی سالم باشد

(با جایگزینی و با ترتیب)

چون در این حالت هر مهره به داخل ظرف اصلی برگشت میکند در هر نوبت مثل این است که از اول شروع میکنیم

$$P_{G-B-G}=P_{1-G}*P_{2-B}*P_{3-G}=\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{0}}{\binom{10}{1}}*\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{1}}{\binom{10}{1}}*\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{0}}{\binom{10}{1}}=\frac{63}{300}$$

یا از این روش هم میشود (چون مهره ها به سرجای اول برگشت میدهیم پس نوبت ها بدون وابستگی است)

$$P(1G\cap 2B\cap 3G)=P(1G).P(2B).P(3G)=\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{63}{300}$$

124) مثال

سکه ای معیوب داریم که احتمال شیر آن دوبرابر خط است داریم سه بار پرتاب میکنیم تابع چگالی احتمال و تابع توزیع احتمال شیر را محاسبه کنید و نمودار رسم کنید

اگر T خط و H شیر باشد و وزن هر خط w باشد وزن هر شیر 2w میشود

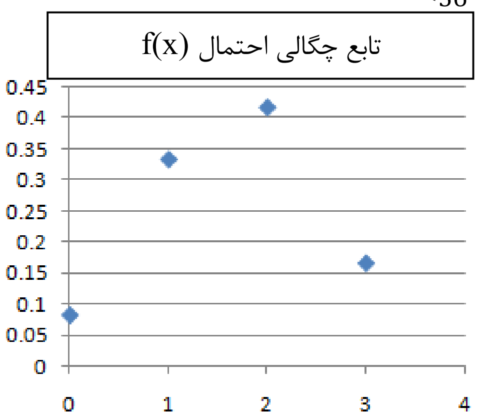
										جمع
کل حالات	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT		
تعداد شیر	3	2	2	1	2	1	1	0		
وزن	6W	5W	5W	4W	5W	4W	4W	3W		36W
احتمال	6/36	5/36	5/36	4/36	5/36	4/36	4/36	3/36		

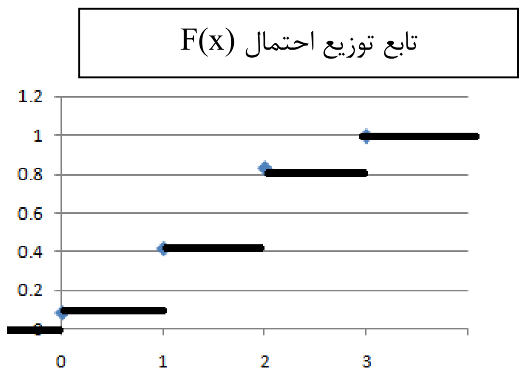
Xتعداد شیر	0	1	2	3
f(x)	3/36	12/36	15/36	6/36
F(x)	3/36	15/36	30/36	36/36

پس از محاسبه تقسیم ها جدول زیر حاصل میشود

Xتعداد شیر	0	1	2	3
f(x)تابع چگالی احتمال	0.083333	0.333333	0.416667	0.166667
F(x)تابع توزیع احتمال	0.083333	0.416667	0.833333	1

$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty\le x<0\\ \frac{3}{36} & 0\le x<1\\ \frac{15}{36} & 1\le x<2\\ \frac{30}{36} & 2\le x<3\\ \frac{36}{36} & 3\le x<+\infty\end{cases}$$





125) مثال

ظرفی دارای 2 مهره سفید و 3 مهره سیاه است – یک مهره از ظرف برداشته و متغیر تصادفی X را برابر تعداد مهره سـفید انتخابی در نظر میگیریم – از مابقی مهره ها 2 مهره بر میداریم و متغیر تصـادفی y را برابر تعداد مهره سفید برای این دو انتخاب در نظر میگیریم

الف- چگالی توام x و Y بدست آورید

ب- مقدار امید $E(x^3y)$ را بدست آورید

$$p_{1w}=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{5}{1}}=\frac{2}{5} \qquad p_{1b}=\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}}=\frac{3}{5}$$

$$p_{1w-2w3w}=not\ possible \qquad p_{1w-2w3b}=\frac{2}{5}*\frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{2}{5}*\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$$

$$p_{1w-2b3b}=\frac{2}{5}*\frac{\binom{1}{0}\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{2}{5}*\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$$

$$p_{1b-2w3w}=\frac{3}{5}*\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}}=\frac{3}{5}*\frac{1}{6}=\frac{1}{10} \qquad p_{1b-2w3b}=\frac{3}{5}*\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{3}{5}*\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$$

$$p_{1b-2b3b}=\frac{3}{5}*\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{3}{5}*\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$$

متغیر X را اولین مهره سـفید نامگذاری کردیم و متغیر Y را دومین و سومین مهره سفید نامگذاری کردیم بنابراین تابع چگالی توام

Y X	0	1	Sum
0	1/10	1/5	3/10
1	2/5	1/5	3/5
2	1/10	Not Possible	1/10
Sum	6/10	2/5	1

$$E(x^3y)=\sum\sum x^3yf(x,y)$$
$$=(0^3*0*\frac{1}{10})+\left(0^3*1*\frac{1}{5}\right)+\left(1^3*0*\frac{2}{5}\right)+\left(1^3*1*\frac{1}{5}\right)+(2^3*0*\frac{1}{10})=\frac{1}{5}$$

تمرین

یک تاس را پنج بار پرتاب میکنیم

الف) احتمال اینکه 2 بار عدد 4 بیاید چقدر است

ب) احتمال اینکه حداکثر 3 بار چهار بیاید چقدر است

126) مثال

الف) مقدار K را طوری تعیین کنید که f(x,y) یک تابع احتمال باشد

ب) مقدار $f(x \leq 2, y < 2)$ باشد بدست آورید

$$f(x,y) = k(x^2 + y^2) \qquad x = 1,2 \qquad , \qquad y = 0,1,2$$

$$\sum\sum f(x,y) = 1 \;\rightarrow \sum\sum k(x^2+y^2) = k(1^2+y^2) + k(2^2+y^2) = 1$$

$$k(1^2+0^2) + k(2^2+0^2) + k(1^2+1^2) + k(2^2+1^2) + k(1^2+2^2) + k(2^2+2^2) = 1$$

$$25k = 1 \;\rightarrow k = \frac{1}{25} \qquad \rightarrow \quad f(x,y) = \frac{1}{25}(x^2+y^2)$$

y x	1	2	g(x)
0	1/25	4/25	5/25
1	2/25	5/25	7/25
2	5/25	8/25	13/25
f(y)	8/25	17/25	25/25

ب) از روی این جدول میتوان در محدوده اعداد را جمع کرد

$$\sum_{1}^{2}\sum_{0}^{1}\frac{1}{25}(x^2+y^2) = \sum_{0}^{1}\frac{1}{25}(1^2+y^2) + \frac{1}{25}(2^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{25}(1^2+0^2) + \frac{1}{25}(2^2+0^2) + \frac{1}{25}(1^2+1^2) + \frac{1}{25}(2^2+1) = \frac{12}{25}$$

127) مثال

تابع چگالی متغیر تصادفی X بصورت زیر میباشد

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{2} & 1 \leq x < 2 \end{Bmatrix}$$

الف) تحقیق کنید آیا تابع چگالی هست؟ تابع توزیع احتمال بدست آورید

ب) مقدار $p(x \geq \frac{3}{2})$ را بدست آورید

$$\int f(x)dx = \int_0^1 (\frac{1}{2}(1-x))dx$$

$$+ \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \left|\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1 + \left|\frac{x^2}{4}\right|_1^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right) = 1$$

یک شد و چون شرط دوم یعنی بین صفر و یک بودن هم دارد پس تابع چگالی احتمال است

$$F(x) = \{0 \qquad\qquad x < 0\}$$

$$F(x) = \left\{0 + \int_0^x (\frac{1}{2})(1-x)dx = \frac{1}{2}\left|x - \frac{x^2}{2}\right|_0^x = \frac{1}{4}\; x^2 \qquad 0 \leq x < 1\right\}$$

$$F(x) = \left\{0 + \int_0^1 (\frac{1}{2})(1-x)dx + \int_1^x \frac{x}{2}dx = \frac{1}{4} + \left|\frac{x^2}{4}\right|_1^x = \frac{1}{4} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{x^2}{4} \qquad 1 \leq x < 2\right\}$$

$$F(x) = \left\{0 + \int_0^1 (\frac{1}{2})(1-x)dx + \int_1^2 \frac{x}{2}dx + 0 \quad = 1 \qquad 2 \leq x\right\}$$

ب)

$$p\left(x \geq \frac{3}{2}\right) = 1 - p\left(x < \frac{3}{2}\right) = 1 - [\int_0^1 \frac{1}{2(1-x)} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{x}{2}dx]$$

128) مثال

سه ماشین A و B و C بترتیب 60% و 10% و 30% کل محصولات کارخانه ای را تولید میکنند. در صد محصولات معیوب این ماشین ها بترتیب 0.2 و 0.4 و 0.3 است.

از بین محصولات کارخانه محصولی بتصادف انتخاب میکنیم

الف) احتمال اینکه معیوب باشد

ب) اگر معیوب باشد احتمال اینکه توسط ماشین C باشد چقدر است

تولید کارخانه را T مینامیم و معیوب را K مینامیم و کل فضا را S مینامیم

$$S=\left\{\begin{matrix} A, & B, & C \\ 6w & 1w & 3w \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{aligned} P(\cup KS) &= P(KA)+P(KB)+P(KC) \\ &= P(Ka).P(A)+P(Kb).P(B)+P(Kc).P(C) \\ &= 0.2*0.6+0.4*0.1+0.3*0.3=0.25 \end{aligned}$$

ب

$$P(C|K)=\frac{P(C\cap K)}{P(K)}=\frac{0.3*0.3}{0.25}=\frac{9}{25}$$

از طریق بیز

$$\begin{aligned} P(C|K) &= \frac{P(C).P(K|C)}{P(C).P(K|C)+P(B)'P(K(B)+P(A).P(K|A)} \\ &= \frac{0.3*0.3}{0.3*0.3+0.1*0.4+0.6*0.2}=\frac{9}{25} \end{aligned}$$

129) مثال

متغیر تصادفی X دارای تابع زیر است

X	-2	0	3	5	10
f(x)	0.1	0.15	0.25	0.3	0.2

الف) آیا f(x) تابع احتمال است

ب) $F(x \leq 2)$ بدست آورید

ج) امید ریاضی و واریانس X بدست آورید

د) E(2x-3) بدست آورید

الف) بله تابع احتمال است زیرا

$$\sum f(x) = 0.1 + 0.15 + 0.25 + 0.3 + 0.2 = 1$$
$$0 \leq f(x) \leq 1$$

ب)

$$F(x) = \sum_{-2}^{2} f(x) = 0.1 + 0.15 = 0.25$$

ج)

$$E(x) = \sum xf(x) = (-2 * 0.1) + (0 * 0.15) + (3 * 0.25) + (5 * 0.3) + (10 * 0.2)$$
$$= 4.05$$
$$E(x^2) = \sum x^2 f(x)$$
$$= (4 * 0.1) + (0 * 0.15) + (9 * 0.25) + (25 * 0.3) + (100 * 0.2)$$
$$= 30.15$$
$$V(x) = E(x^2) + (E(x))^2 = 30.15 - 4.05 = 26.1$$

						جمع
X	-2	0	3	5	10	
f(x)	0.1	0.15	0.25	0.3	0.2	1
e(x)=x*f(x)	-0.2	0	0.75	1.5	2	4.05
x^2	4	0	9	25	100	
e(x^2)=(x^2)*f(x)	0.4	0	2.25	7.5	20	30.15

د)

$$E(2x - 3) = 2E(x) - 3 = 2 * 4.05 - 3 = 5.1$$

130) مثال

یک تلفنچی 10٪ از تلفنها را اشتباه وصل میکند اگر در یک ساعت 20 تلفن وصل کرده باشد

الف) احتمال اینکه 5 شماره را اشتباه وصل کرده باشد چقدر است

ب) احتمال اینکه بیش از 2 شماره اشتباه وصل کرده باشد چقدر است

چون زمان است پس پواسن است

λ=10%*20=2

$$f(X)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-2}2^{x}}{x!}$$

$$f(x=5)=\frac{e^{-2}2^{5}}{5!}$$

$$f(x>2)=\sum_{3}^{20}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=1-f(x\leq 2)=1-\sum_{0}^{2}\frac{e^{-2}2^{x}}{x!}$$

131) مثال

در جدول زیر

X	0	1	2
_ f(x)	0.2	0.5	0.3

الف) آیا f(x) تابع احتمال است

ب) امید و واریانس x بدست آورید

$$\sum f(x)=0.2+0.5+0.3=1$$

پس تابع احتمال است

امید

$$E(x)=\sum xf(x)=(0*0.2)+(1*0.5)+(2*0.3)=1.1$$

$$E(x^2)=\sum x^2f(x)=(0^2*0.2)+(1^2*0.5)+(2^2*0.3)=1.7$$

واریانس

$$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2=1.7-(1.1)^2=0.49$$

مثال (132

یک شرکت بیمه میزان تصادفات در 50 روز بشرح زیر جمع آوری نموده است

تعداد تصادف	0	1	2	3	4
تعداد روز	10	20	8	7	5

الف) تابع چگالی؟

ب) تابع توزیع؟

ج) احتمال اینکه در یک روز کمتر از 3 تصادف رخ دهد؟

تعداد تصادف	0	1	2	3	4
احتمال	10/50	20/50	8/50	7/50	5/50

x=تعداد تصادف		0	1	2	3	4
P=f(x)		0.2	0.4	0.16	0.14	0.1
F(x)	0	0.2	0.6	0.76	0.9	1

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.2 & 0\le x<1 \\ 0.6 & 1\le x<2 \\ 0.76 & 2\le x<3 \\ 0.9 & 3\le x<4 \\ 1 & 4\le x \end{cases}$$

طبق جدول F(x) آنگاه برای x<3 به مقدار 0.76 میباشد

مثال (133

تابع توزیع بصورت زیر است تابع احتمال بدست آورید

$$F(x)=\frac{x^2+x}{12} \qquad 0\le x<3$$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{x^2+x}{12}\right)}{dx}=\frac{1}{12}(2x+1)$$

حال بررسی کنیم آیا واقعا تابع چگالی احتمال است

$$f(x)=\frac{1}{12}(2x+1)$$

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 \frac{1}{12}(2x+1)dx=\frac{1}{12}\left|2\frac{x^2}{2}+x\right|_0^3=1$$

بله تابع چگالی احتمال است چون هر دو شرط را پوشش میدهد

134) مثال

تابع توام زیر در نظر بگیرید

X y	1	3	5
2	0.1	0.2	0.1
4	0.15	0.30	0.15

الف) $p(x>2)$ ؟ $p(x=2)$ ؟

ب) $p(x>y)$ ؟

ج) $p(y>=3 , x=4)$ ؟

$$P(x>2)=P(x=4,y=1)+P(x=4,y=3)+P(x=4,y=5)$$
$$=0.15+0.30+0.15=0.60$$
$$P(x=2)=P(x=2,y=1)+P(x=2,y=3)+P(x=2,y=5)$$
$$=0.1+0.2+0.1=0.4$$

ب

$$P(x>y)=P(x=2,y=1)+P(x=4,y=1)+P(x=4,y=3)$$
$$=0.1+0.15+0.3=0.55$$

ج)

$$P(y\geq 3,x=4)=P(y=3,x=4)+P(y=5,x=4)=0.3+0.15=0.45$$

135) مثال

تابع احتمال توام Xو Y بصورت جدول زیر است

X y	-1	0	3	G(x)
2	0.1	0.4	0	
4	0.15	0.2	0.15	
H(y)				

الف) امید ریاضی X و Y ؟

ب) واریانس X و Y ؟

ج) امید ریاضی (2x+3y)

د) آیا X و Y مستقل هستند

X y	-1	0	3	G(x)
2	0.1	0.4	0	0.5
4	0.15	0.2	0.15	0.5
H(y)	0.25	0.6	0.15	1

$$E(x) = \sum xG(x) = (2 * 0.5) + (4 * 0.5) = 3$$
$$E(y) = \sum yH(y) = (-1 * 0.25) + (0 * 0.6) + (3 * 0.15) = 0.20$$
$$E(x^2) = \sum x^2 G(x) = (2^2 * 0.5) + (4^2 * 0.5) = 10$$
$$V(X) = E(x^2) - (E(x))^2 = 10 - 3^2 = 1$$
$$E(y^2) = \sum y^2 H(y) = ((-1)^2 * 0.25) + (0^2 * 0.6) + (3^2 * 0.16) = 1.69$$
$$V(y) = E(y^2) - (E(y))^2 = 1.69 - 0.2^2 = 1$$
$$E(2x + 3y) = 2 * E(x) + 3 * E(y) = 6 + 0.6 = 6.6$$

برای تشخیص استقلال یک مورد را مقایسه میکنیم

$$G(x) * H(y) \cong f(x,y)$$
$$G(2) * H(-1) \cong f(2,-1) \rightarrow 0.5 * 0.25 \cong 0.1 \rightarrow 0.125 \neq 0.1$$

چون مساوی نیست پس مستقل نیستند

136) مثال

دوجعبه داریم جعبه اول 2مهره سفید و 3مهره قرمز   جعبه دوم 3 مهره سفید و 4 مهره قرمز دارد از جعبه اول یک مهره انتخاب و به داخل جعبه دوم میاندازیم یک مهره از جعبه دوم بر میداریم

احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

یک مهره از جعبه اول ممکن است سفید یا قرمز باشد احتمال یک مهره از جعبه اول

$$P_{1w} = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{5}{1}} = \frac{2}{5} \qquad P_{1R} = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{3}{5}$$

اگر مهره جعبه اول سفید باشد و آن را در جعبه دوم بیاندازیم احتمال مهره سفید از جعبه دوم

$$P_{2w-1w} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{0}}{\binom{8}{1}} = \frac{4}{8}$$

اگر مهره جعبه قرمز باشد و آن را در جعبه دوم بیاندازیم احتمال مهره سفید از جعبه دوم

$$P_{2w-1R} = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{0}}{\binom{8}{1}} = \frac{3}{8}$$

بطورکلی

$$P_{2w} = P_{2w|1W} \cup P_{2w|1R} = P_{2w|1W} + P_{2w|1R} = \left(\frac{4}{8} * \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{8} * \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{40} + \frac{9}{40} = 17/40$$

137) مثال

تاس شانس زوج آن 3 برابر فرد است یکبار پرتاب میکنیم

الف) احتمال فرد آمدن چقدر است

ب) اگر عدد آمده بزرگتر از 3 باشد احتمال فرد بودن چقدر است

فرد را O و E زوج و بزرگتر از 3 را T نامگذاری میکنیم وزن هر حالت را W مینامیم

$$S=\{\underset{W}{1},\ \underset{3W}{2},\ \underset{W}{3},\ \underset{3W}{4},\ \underset{W}{5},\ \underset{3W}{6}\}$$

$$O=\{\underset{W}{1},\ \underset{W}{3},\ \underset{W}{5}\}$$

$$E=\{\underset{3W}{2},\ \underset{3W}{4},\ \underset{3W}{6}\}$$

$$T=\{\underset{3W}{4},\ \underset{W}{5},\ \underset{3W}{6}\}$$

$$P(O)=\frac{3w}{12w}$$

$$P(T)=\frac{7}{12}$$

$$P(O|T)=\frac{P(O\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{1}{7}$$

برای حل ب میتوانستیم از بیز حل کنیم

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)*P(A|B_1)}{\sum P(B_i)*P(A|B_i)}$$

$$P(O|T)=\frac{P(O)*P(T|O)}{P(O)*P(T|O)+P(E)*P(T|E)}=\frac{\frac{3}{12}*\frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{12}*\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{9}{12}*\frac{6}{9}\right)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{6}{12}}$$

$$=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1+6}{12}}=\frac{1}{7}$$

138) مثال!؟

سکه ای 3 بار پرتاب میکنیم احتمال حداکثر یک شیر را بدست آورید

سکه ای 6 بار پرتاب میکنیم احتمال حداکثر یک شیر را بدست آورید

هر پرتاب دو وضعیت دارد تعداد کل حالات

2^n

بنابراین برای 3 پرتاب کلا 8 وضعیت داریم

$S = \{TTT, TTH, THH, THT, HTH, HTT, HHH, HHT\}$

وضعیت تعداد شیر 0 1 2 1 2 1 3 2

احتمال هر حالت 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8

----

x شیر	0	1	2	3
احتمال f(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$p(X \leq 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

میتوان نتیجه گرفت که حداکثر باندازه n+1 حداکثر یک شیر وجود دارد

برای 6 بار پرتاب احتمال حداکثر یک شیر

$$p(X \leq 1) = \frac{n+1}{2^n} = \frac{6+1}{2^6} = \frac{7}{128}$$

139) مثال

در سه بار پرتاب تاس اگر X آمدن تعداد 6 باشد مقادیر X و جدول چکالی و توزیع را رسم کنید

اگر R کل حالات یک پرتاب و n تعداد پرتاب باشد کل تعداد کل حالات

$R^n = 6^3 = 216$

x	0	1	2	3
_f(x)	(5/6)*(5/6)*(5/6)			(1/6)*(1/6)*(1/6)

مثال (140

آیا توابع زیر، تابع احتمال است. امید و واریانس X را بدست آورید

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0<x\le 4\\ 0 & other\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{x}} & 0<x\le 4\\ 0 & other\end{cases}$

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 \sqrt{x}dx=\left|\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right|_0^4=\left|\frac{2}{3}x^{3/2}\right|_0^4=\frac{16}{3}$$

خیر تابع احتمال نیست

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 \frac{1}{4\sqrt{x}}dx=\left|\frac{1}{4(\frac{-1}{2}+1)}x^{-\frac{1}{2}+1}\right|_0^4=\left|\frac{1}{2}x^{1/2}\right|_0^4=1$$

بله چون دوشرط برقرار است تابع چگالی احتمال است

$$E(x)=\int_0^4 x(\frac{1}{4\sqrt{x}})dx=\int_0^4 \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}dx=\left|\frac{1}{4}*\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right|_0^4=\frac{1}{4}*(\frac{2}{3}*4^{3/2})=\frac{4}{3}$$

$$E(x^2)=\int_0^4 x^2(\frac{1}{4\sqrt{x}})dx=\int_0^4 \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}dx=\left|\frac{1}{4}*\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right|_0^4=\frac{1}{10}*4^{\frac{5}{2}}=3.2$$

$$V(X)=E(x^2)-(E(x))^2=\frac{16}{5}-(\frac{4}{3})^2=\frac{16}{5}-\frac{16}{9}=\frac{64}{45}$$

مثال (141

در جعبه ای 5 مهره سفید و 7 مهره مشکی داریم شش مهره بیرون میاوریم

الف) احتمال اینکه 2 مهره سفید و 4 مهره مشکی باشد چقدر است

ب) احتمال اینکه 3 مهره همرنگ باشد

$$P_{2w+4B}=\frac{\binom{5}{2}\binom{7}{4}}{\binom{12}{6}}=\frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}*\frac{7!}{4!\,(7-4)!}}{\frac{12!}{6!\,(12-6)!}}$$

$$P_{3w+3B}=\frac{\binom{5}{3}\binom{7}{3}}{\binom{12}{6}}= \qquad P_{3B+3w}=\frac{\binom{5}{3}\binom{7}{3}}{\binom{12}{6}}=$$

$$P=P_{3w+3B}+P_{3B+3W}$$

142) مثال

احتمال برنده شدن یک شطرنج باز 0.20 است

احتمال اینکه در پنجمین مسابقه برای سومین بار پیروز شود چقدر است؟

توزیع دوجمله‌ای

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots.n \\ 0 & other \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{1}^{3} \binom{5}{3} 0.2^x (1-0.2)^{5-x} & x = 0,1,2,\ldots.n \\ 0 & other \end{cases}$$

حال از روی جدول دو جمله ای جواب را مشاهده کنید

143) مثال

از تابع چگالی احتمال ذیل

الف) تابع توزیع احتمال بدست آورید

ب) P(x>1/2) بدست آورید

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1\le x\le 2 \\ 0 & other \end{Bmatrix}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx=0$$

$$F(x)=0+\int_{0}^{x} xdx=\frac{1}{2}x^2$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} odx+\int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{x}(2-x)dx=\left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^1+\left|2x-\frac{1}{2}x^2\right|_1^x$$
$$=\frac{1}{2}1^2+2x-\frac{1}{2}x^2-2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} odx+\int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{\infty}0dx=\left|\frac{1}{2}x^2\right|_0^1+\left|2x-\frac{1}{2}x^2\right|_1^2$$
$$=\frac{1}{2}1^2+(2*2)-(\frac{1}{2}2^2)-2+\frac{1}{2}=1$$

$$F(x)=\begin{Bmatrix} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1 \\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1 & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x \end{Bmatrix}$$

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1\le x\le 2 \\ 0 & other \end{Bmatrix}$$

$$P\left(x>\frac{1}{2}\right)=\int_{1/2}^{1} xdx + \int_{1}^{2}(2-x)dx + \int_{2}^{\infty}0dx=\left|\frac{1}{2}x^2\right|_{1/2}^{1}+\left|(2x-\frac{x^2}{2}\right|_1^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\left(4-\frac{4}{2}-2+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{8}$$

تمرین

یک تاس را 4 بار پرتاب میکنیم احتمال حداکثر 2 بار عدد 3 ظاهر شود؟

مثال 144)

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع ذیل باشد تابع چگالی را بدست اورید

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x \le 0 \\ 1-(1+x)e^{-x} & 0 \le x \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = \frac{d(F(x))}{dx} = \frac{d(1-e^{-x}-xe^{-x})}{dx} = 0 + e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}$$

تحقیق کنیم تابع چگالی احتمال میباشد؟

اگر u=g(x) و v=f(x) باشد همیشه میتوان نوشت

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx \qquad u = x \qquad dv = e^{-x}dx$$

$$v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \qquad du = dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \int_0^\infty xe^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int_0^\infty -e^{-x}dx$$

$$= |x(-e^{-x})|_0^\infty - |e^{-x}|_0^\infty = 1$$

هر دو شرط (هم جمع مساوی یک و هم بین صفر و یک) برقرار است پس تابع چگالی احتمال است

مثال 145)

کارخانه ایران خودرو 5 روز هفته فعال است . تعداد اتومبیلهای ساخته شده در هر روز یکسان است.

احتمال اتومبیل به رنگ سفید در روزهای مختلف هفته : شنبه50٪ -یکشنبه40٪ -
دوشنبه30٪ -سه شنبه 30٪ -چهارشنبه 20٪ - اتومبیلی خریدیم رنگ آن سفید بود .

احتمال اینکه رور سه شنبه ساخته شده باشد چقدر است؟

ایام هفته T0= شنبه .... تا .... T4 = چهارشنبه نامگذاری میکنیم و رنگ سفید W

پنج روز کاری بدین معنی است که هرروز کاری معادل 1/5 است مثلا شنبه 1/5 – یکشنبه 1/5 و .....

$$P(T3|W) = \frac{P(T3)*P(W|T3)}{P(T0)*P(W|T0)+P(T1)*P(W|T1)+P(T2)*P(W|T2)+P(T3)*P(W|T3)+P(T4)*P(W|T4)} =$$

$$P(T3|W) = \frac{\frac{1}{5}*0.3}{\left(\frac{1}{5}*0.5\right)+\left(\frac{1}{5}*0.4\right)+\left(\frac{1}{5}*0.3\right)+\left(\frac{1}{5}*0.3\right)+\left(\frac{1}{5}*0.2\right)} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{5}{50}+\frac{4}{50}+\frac{3}{50}+\frac{3}{50}+\frac{2}{50}} = \frac{3}{17}$$

146) مثال

ثابت کنید

$$\binom{N+R-1}{R}=\binom{N+R-1}{N-1}$$

حل: دو طرف تساوی را جدا جدا محاسبه میکنیم

$$\binom{N+R-1}{R}=\frac{(N+R-1)!}{R!\,(N+R-1-R)!}=\frac{(N+R-1)!}{R!\,(N-1)!}$$

$$\binom{N+R-1}{N-1}=\frac{(N+R-1)!}{(N-1)!\,[(N+R-1-(N-1)]!}=\frac{(N+R-1)!}{(N-1)!\,(R)!}$$

سمت چپ و راست مساوی شد

147) مثال

احتمال اینکه محصول کارخانه ای استاندارد باشد 80% میباشد 3 محصول از کارخانه میخریم اگر x نشاندهنده تعداد محصول استاندارد باشد

الف) نوع توزیع مشخص کنید ب) فرمول آنرا بنویسید ج) میانگین واریانس را محاسبه کنید

چون ازمایش دارای دو نتیجه است (استاندارد و غیر استاندارد) پس توزیع دوجمله ای است

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{(n-x)} & x=0,1,2,\dots n\\ 0 & other\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\binom{3}{x}0.80^x(1-0.80)^{(3-x)} & x=0,1,2,3\\ 0 & other\end{cases}$$

$$\mu=n*p=3*0.80=2.4$$
$$\sigma^2=n*p*(1-p)=3*0.80*0.20=0.48$$

****

حل مسائل امتحان کارشناسی آمار احتمالات 93/10/25 که ممکن است بعضی اعداد و محاسبات مرتبط با امتحان نباشد

1. نمرات 12 واحد دانشجویی به شرح ذیل میباشد

نمره = x	10	12	15	16	18
تعداد =f	1	2	3	5	1

الف) مد چه عددی است(چرا) – ب) میانه چه عددی است(چرا) ج) میانگین و واریانس و انحراف معیار را بدست آورید

الف) مد داده با بیشترین تکرار که نمره 16 مود میباشد

ب) برای میانه باید وسط کل داده ها را پیدا کنیم جمع داده ها را بر 2 تقسیم کنیم و در ستون Fi دنبال خود این جواب و یا کران بالای آن میگردیم که عدد 15 . 16 میشود

X_i	10	12	15	16	18
f_i	1	2	3	5	1
Fi	1	3	6	11	12

ج)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{(10*1)+(12*2)+(15*3)+(16*5)+(18*1)}{(1+2+3+5+1)} = 14.75$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$
$$= \frac{(10-14.75)^2*1+(12-14.75)^2*2+(15-14.75)^2*3+(16-14.75)^2*5+(18-14.75)^2*1}{(1+2+3+5+1)}$$
$$= 4.69 = \sigma^2 \qquad \sigma = 2.17$$

2. در ظرفی 3 توپ سفید 1 توپ سیاه 2 توپ قرمز وجود دارد سه توپ باهم بدون جایگزینی بیرون میاوریم

الف) احتمال اینکه یک توپ سفید و دو توپ قرمز باشد چقدر است

اگر سه توپ یکی یکی و بدون جایگزینی بیرون میاوریم

ب) احتمال اینکه اولی سفید و دومی قرمز و سومی هم قرمز باشد

$$P = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{0}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{20}$$

$$P = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{0}\binom{2}{0}}{\binom{6}{1}} * \frac{\binom{2}{0}\binom{1}{0}\binom{2}{1}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{2}{0}\binom{1}{0}\binom{1}{1}}{\binom{4}{1}} = \frac{3}{6}*\frac{2}{5}*\frac{1}{4}$$

3. یک موسسه کل خودروهای مورد نیازش را از سه آژانس 10٪ از آژانس A – 30٪ از آژانس B – 60٪ از آژانس C تامین میکند - تعداد خودروهای معیوب در سه آژانس– 4٪ آژانس A – 8٪ آژانس B – 5٪ از آژانس C معیوب میباشد

یک خودرو کرایه میکنیم

الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟

ج) اگر این خودرو کرایه شده خراب باشد احتمال اینکه از آژانس B باشد چقدر است؟

$$P(M) = (0.1*0.04)+(0.3*0.08)*(0.6*0.05) = \frac{58}{1000} = 0.058$$
$$P(M) = 1-0.058 = 0.942$$
$$P(B|M) = \frac{P(B)*P(M|B)}{\sum P(B_i)*P(M|B_i)} = \frac{0.3*0.08}{(0.1*0.04)+(0.3*0.08)*(0.6*0.05)} = \frac{0.024}{0.058} = \frac{24}{58} = \frac{12}{29}$$

4. سکه ای را 2 بار پرتاب میکنیم

تعداد خطها را بررسی نمایید تابع احتمال f(x) (چگالی) و تابع توزیع تجمعی احتمال F(x) را بنویسد و منحنی هر دو را رسم نمایید

خط= T

S={HH,HT,TH,TT}

0 1 1 2 تعداد خط

1/4 1/4 1/4 1/4 احتمال هر مورد

X= تعداد خط	0	1	2
تابع احتمال P(X=x) = f(x) چگالی	1/4	2/4	1/4

Rx= { 0 , 1 , 2) برد x

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{4} = 1 & 2 \le x \end{cases}$$

نمودار ....

5. الف) مقدار K را طوری تعیین کنید که تابع زیر تابع چگالی احتمال شود

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{k+1} & 0<x<3\\ 0 & other\end{cases}$$

با جایگذاری K ب) تابع چگالی f(x) توزیع (تجمعی) F(x) را بنویسید ج) $1\le P\le 2$ بدست آورید

د) امید ریاضی را بدست آورید E(x)

$$\int \frac{x^2+3}{k+1}dx=1 \qquad \frac{1}{k+1}\left(\int x^2dx+\int 3dx\right)=1$$

$$\frac{1}{k+1}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3+3x\Big|_0^3\right)=1 \qquad \frac{1}{k+1}\left(\frac{27}{3}+9\right)=1 \qquad \frac{18}{k+1}=1 \qquad k=17$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{18} & 0<x<3\\ 0 & other\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \displaystyle\int \frac{x^2+3}{k+1}dx & 0<x<3\\ 1 & 3<x\end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2+3}{18}dx=\frac{1}{18}\left\{\left|\frac{x^3}{3}+3x\right|_1^2\right\}=\frac{1}{18}\left\{\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)+3(2-1)\right\}=\frac{16}{54}=\frac{8}{27}$$

$$E(x)=\int_0^3 x*\frac{x^2+3}{18}dx=\frac{1}{18}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^3=\frac{135}{72}$$

6. احتمال اینکه محصول کارخانه ای استاندارد باشد 80% میباشد 5 محصول از کارخانه میخریم اگر x نشاندهنده تعداد محصول استاندارد باشد

الف) نوع توزیع مشخص کنید ب) فرمول آنرا بنویسید ج) میانگین واریانس را محاسبه کنید

توزیع دوجمله ای بدلیل دو وضعیتی بودن(استاندارد 0.8 - غیر استاندارد 0.2)

$f(x) = \binom{5}{x}(0.8)^x(1-0.8)^{5-x}$

$\mu = n * p = 5 * 0.8 = 4$

$\sigma^2 = n * p * q = n * p * (1-p) = 5 * 0.8 * 0.2 = 0.8$

7. ظرفی دارای 4 مهره سفید و 1 مهره سیاه است – یک مهره از ظرف برداشته و متغیر تصادفی x را برابر تعداد مهره سفید انتخابی در نظر میگیریم – از مابقی مهره ها 2 مهره بر میداریم و متغیر تصادفی y را برابر تعداد مهره سفید برای این دو انتخاب در نظر میگیریم. الف)تابع چگالی احتمال و جدول توزیع احتمال $(x_و y)$ بدست آورید. ب- $P\{(x,y)|x \le y\} = ?$ ج-مقدار امید $E(xy)$ را بدست آورید

مرحله اول) پنج مهره و بررسی یک مهره سفیدw

حالت اول- اولی سفید) $P_{1w} = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} = \frac{4}{5}$ (حالت دوم- اولی (نبود سفید) یعنی سیاه $P_{1b} = \frac{\binom{4}{0}\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{1}{5}$

مرحله دوم) پس از اتمام مرحله اول(حالت اول) یک مهره سفید کم میشود مرحله دوم چهار مهره داریم سه تا سفیدw یکی سیاه b

$P_{1w+2w3b} = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{4}{5} * \frac{3}{6}$

$P_{1w+2b3b} = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{3}{0}\binom{1}{2}}{\binom{4}{2}} = Not\ Possible$

$P_{1w-2w3w} = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{0}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{4}{5} * \frac{3}{6}$

پس از اتمام مرحله اول(حالت دوم) یک مهره سیاه کم میشود مرحله دوم چهار مهره داریم چهار تا سفیدw بدون سیاه b

$P_{1b+2w3b} = \frac{\binom{4}{0}\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{4}{1}\binom{0}{1}}{\binom{4}{2}} = Not\ P.$

$P_{1b+2b3b} = \frac{\binom{4}{0}\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{4}{0}\binom{0}{2}}{\binom{4}{2}} = Not\ P.$

$P_{1b+2w3w} = \frac{\binom{4}{0}\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} * \frac{\binom{4}{2}\binom{0}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{5} * 1$

Y X	0	1	Sum
0	غ ق ق	غ ق ق	
1	غ ق ق	$\frac{4}{5} * \frac{3}{6} = \frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	$\frac{1}{5} * 1 = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} * \frac{3}{6} = \frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$
Sum	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{10}$	1

$P\{(x,y)|x \le y\} = \left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{4}{10}\right) = \frac{10}{10} = 1$

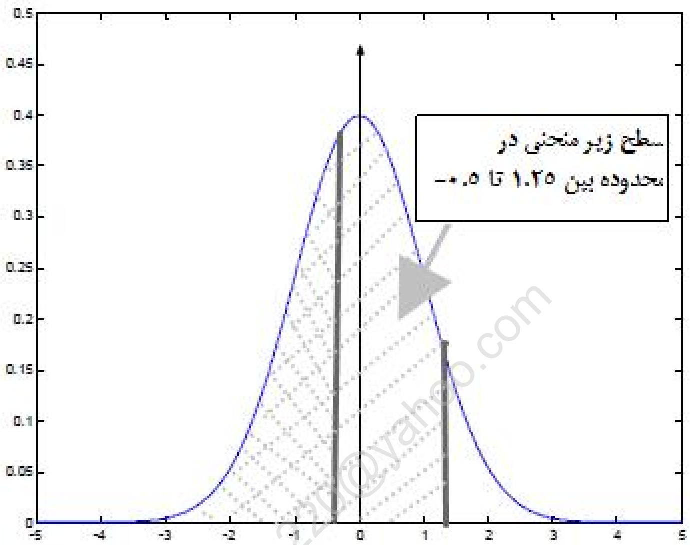
$E(x,y) = \left(0 * 2 * \frac{1}{5}\right) + \left(1 * 1 * \frac{4}{10}\right) + \left(1 * 2 * \frac{4}{10}\right) = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1.2$

8. در یک تابع توزیع نرمال با میانگین 10 و واریانس 16 $x \sim N(10,16)$ مطلوبست محاسبه $P(8 \le x \le 15)$

$$P(x \le 15) = p\left(\frac{x-u}{\sigma} \le \frac{15-10}{4}\right) = P(Z \le 1.25) = 0.894$$
$$P(x \ge 8) = p\left(\frac{x-u}{\sigma} \ge \frac{8-10}{4}\right) = P(Z \ge -0.5) = 1 - P(Z \le -0.5) = 1 - 0.308 = 0.692$$
$$P(x \le 8) = p\left(\frac{x-u}{\sigma} \le \frac{8-10}{4}\right) = P(Z \le -0.5) = 0.308$$

با توجه به سطح زیر منحنی

$$P(8 \le x \le 15) = P(x \le 15) - P(x \le 8)$$
$$P(8 \le x \le 15) = 0.894 - 0.308 = 0.586$$



امتحان کاردانی آمار احتمالات 93/10/28 ساعت16:00-17:45 (90دقیقه) (45+45 دقیقه) بعضی موارد دقیقا شبیه به امتحان نیست

1. نمرات 10 واحد دانشجویی به شرح ذیل میباشد

نمره = x	10	12	15	16	18
تعداد =f	2	4	2	1	1

الف) مد چه عددی است(چرا) – ب) میانه چه عددی است(چرا) ج) میانگین و واریانس و انحراف معیار را بدست آورید

الف) مد داده با بیشترین تکرار که نمره 12 مود میباشد

ب) برای میانه باید وسط کل داده ها را پیدا کنیم جمع داده ها را بر 2 تقسیم کنیم(نصف 10 برابر 5میشود) و در ستون Fi دنبال خود این جواب و یا کران بالای آن میگردیم که Fi=5 نداریم و کران بالا عدد6 میشود و داده متناظر آن نمره 12 میانه میشود

X_i	10	12	15	16	18	
f_i	2	4	2	1	1	
Fi	2	6	8	9	10	

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{(10*2)+(12*4)+(15*2)+(16*1)+(18*1)}{(2+4+2+1+1)} = 13.2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{(10-13.2)^2*2+(12-13.2)^2*4+(15-13.2)^2*2+(16-13.2)^2*1+(18-13.2)^2*1}{(2+4+2+1+1)}$$

$$= 6.36 = \sigma^2 \qquad \sigma = 2.52$$

2. تاسی داریم احتمال عدد فرد دو برابر زوج است یک بار پرتاب میکنیم احتمال اینکه عدد زوج کمتر از 5 بیاید چقدر است

کل حالات ممکن $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

وزن حالات 2w w 2w w 2w w

احتمال هر مورد 2/9 1/9 2/9 1/9 2/9 1/9

حالات خواسته شده $A = \{2, 4\}$

وزن هر مورد w w

احتمال هر مورد 1/9 1/9

$$P(A) = \frac{w+w}{2w+w+2w+w+2w+w} = \frac{2}{9}$$

یا

$P(A) = 1/9+1/9=2/9$

3. شرکتی دارای 4 کامپیوتر میباشد که یک دستگاه از آنها خراب است دو کامپیوتر از بین آنها انتخاب میکنیم.

الف) احتمال اینکه هر دو سالم باشند چقدر است . ب) احتمال اینکه یکی خراب و یکی سالم باشد چقدر است.

$$P = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} \qquad\qquad P = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6}$$

4. الف) مقدار K را طوری تعیین کنید که تابع زیر تابع چگالی احتمال شود

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{k+1} & x=0,1,2\\ 0 & other\end{cases}$$

x		0	1	2
f(x)				
F(x)				

با جایگذاری K ب) جدول فوق را تکمیل کنید تابع چگالی f(x) توزیع (تجمعی) F(x) را هم بدست آورید

ج) $1\le P\le 2$ بدست آورید ه) امید ریاضی را بدست آورید E(x)

$$\sum_{x=0}^{2}\frac{x+2}{k+1}=1 \qquad \frac{0+2}{k+1}+\frac{1+2}{k+1}+\frac{2+2}{k+1}=1 \qquad \frac{9}{k+1}=1 \qquad k+1=9 \qquad k=8$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{9} & x=0,1,2\\ 0 & other\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{2}{9} & 0\le x<1\\ \frac{5}{9} & 1\le x<2\\ \frac{9}{9} & 2\le x\end{cases}$$

x		0	1	2
f(x)		2/9	3/9	4/9
F(x)	0	2/9	5/9	9/9

$$1\le p<2=F(2)-F(1)=\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{3}{9}$$

$$1\le p\le 2=f(1)+f(2)=\frac{1+2}{9}+\frac{2+2}{9}=\frac{7}{9}$$

$$E(x)=\sum xf(x)=\left(0*\frac{2}{9}\right)+\left(1*\frac{3}{9}\right)+\left(2*\frac{4}{9}\right)=\frac{11}{9}$$

5. از سوابق مشخص شده که احتمال اینکه دانشجویی در امتحان کارشناسی قبول شود 65% میباشد این دانشجو در آینده در امتحان کارشناسی 4 بار شرکت میکند الف) نوع توزیع مشخص کنید ب) فرمول آنرا بنویسید ج) میانگین واریانس را محاسبه کنید د) احتمال قبولی 3 بار چقدر است

توزیع دوجمله ای بدلیل دو وضعیتی بودن(قبول 0.65 - مردودی 0.35)

$$f(x)=\binom{4}{x}(0.65)^{x}(1-0.65)^{4-x}$$

$$\mu=n*p=4*0.65=2.6$$

$$\sigma^2=n*p*q=n*p*(1-p)=4*0.65*0.35=0.91$$

$$f(x)=\binom{4}{3}(0.65)^{3}(1-0.65)^{4-3}=4*(0.65)^{3}(0.35)^{2}$$

6. سکه ای را 2 بار پرتاب میکنیم X تعداد شیرها در دو پرتاب میباشد و Y تعداد شیر در پرتاب دوم میباشد جدول تابع احتمال توام X و Y را بدست آورید . $P=\{(x,y)|x \le y)\}$ را بدست آورید

H= شیر T= خط

S={HH, HT, TH, TT }

تعداد شیر در دو پرتاب	=x	0	1	1	2
احتمال هر مورد در دو پرتاب		1/4	1/4	1/ 4	1/4
تعداد شیر در پرتاب دوم	=y	0	1	0	1
احتمال هر مورد در پرتاب دوم		1/4	1/4	1/ 4	1/4

y↓ x→	0	1	2	h(y)
0	1/4	1/4	غ ق ق	2/4
1	غ ق ق	1/4	1/4	2/4
g(x)	1/4	2/4	1/4	4/4

برای $x \le y$ آنگاه

$$P\{(X,Y)\in A\} = P(x=0,y=0)+P(x=0,y=1)+P(x=1,y=1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

7. موسسه زند کل کامپیوترهای مورد نیازش را از دو شرکت 40٪ از شرکت A – 60٪ از شرکت B تامین میکند – میزان کامپیوترهای معیوب در دو شرکت – 2٪ شرکت A – 3٪ شرکت B معیوب میباشد. یک کامپیوتر از انبار موسسه برمیداریم. الف) احتمال اینکه معیوب باشد؟ ب) احتمال اینکه سالم باشد؟ ج) اگر این کامپیوتر خراب باشد احتمال اینکه از شرکت B باشد چقدر است؟

$$P(M) = (0.4*0.02)+(0.6*0.03) = \frac{8}{1000}+\frac{18}{1000} = 0.026$$

$$P(M) = 1-0.026 = 0.974$$

$$P(B|M) = \frac{P(B)*P(M|B)}{\sum P(B_i)*P(M|B_i)} = \frac{0.6*0.03}{(0.4*0.02)+(0.6*0.03)} = \frac{0.018}{0.026} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$$

8. متغیر تصادفی x دارای تابع چگالی احتمال است مطلوبست الف) محاسبه مقدار a ب) محاسبه p(x>1)

$$f(x) = \begin{cases} a(4x-2x^2) & 0<x<2 \\ 0 & other \end{cases}$$

$$\int_0^2 a(4x-2x^2)dx = 1 \qquad \left|a(4*\frac{1}{2}*x^2-2*\frac{1}{3}*x^3)\right|_0^2 = 1 \qquad a=\frac{3}{8}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x-2x^2) & 0<x<2 \\ 0 & other \end{cases}$$

$$P(x>1)=\int_1^\infty \frac{3}{8}(4x-2x^2)dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{3}{8}(4x-2x^2)dx + \int_2^\infty 0dx = \left|\frac{3}{8}(4*\frac{1}{2}*x^2-2*\frac{1}{3}*x^3)\right|_1^2 = 0.5$$

پایان
در هر حرفه ای که هستید نه اجازه دهید که به بدبینیهای بیحاصل آلوده شوید و نه بگذارید که بعضی لحظات تاسف بار که برای هر ملتی پیش می آید شما را به یاس و ناامیدی بکشاند. در آرامش حاکم بر آزمایشگاهها و کتابخانه هایتان زندگی کنید .
نخست از خود بپرسید : " برای یادگیری و خودآموزی چه کرده ام ؟ "
سپس همچنان که پیشتر میروید بپرسید : " من برای کشورم چه کرده ام ؟ "
و این پرسش را آنقدر ادامه دهید تا به این احساس شادیبخش و هیجان انگیز برسید که شاید سهم کوچکی در پیشرفت و اعتلای بشریت داشته اید.
اما هر پاداشی که زندگی به تلاشهایمان بدهد یا ندهد هنگامی که به پایان تلاشهایمان نزدیک میشویم هر کداممان باید حق آن را داشته باشیم که با صدای بلند بگوییم
" من آنچه در توان داشته ام انجام دادهام "

لوئی پاستور 1822-1895

شماره صفحه	عنوان

آمار: 2
احتمال: 2
استنباط: 2
جمعیت: 2
نمونه: 2
متغیر: 2
مقیاس سازی 2
داده: 2
مشخص کننده مرکزی 2
خاصیت میانه 5
مود در داده پیوسته 6
مشخصه های پراکندگی: 7
فراوانی: 7
میانگین 7
واریانس $\sigma 2$ انحراف معیار σ 7
جمع 8
میانگین در داده پیوسته 9
خواص میانگین حسابی 10
خواص واریانس(پراش) 10

☜** میانگین هندسی 11
☜**میانگین همساز (توافقی) (هارمونیک) 11
☜رگرسیون و همبستگی خطی 15
☜شمارش - ترتیب و ترکیب: 18
☜شمارش 18
☜ترتیب 18
☜ترکیب 18
☜احتمالات 24
☜ 24
☜تعداد حالات 24
☜خواص احتمال 26
☜احتمال شرطی 26
☜احتمال شرطی دو پیش آمد مستقل 26
☜قضیه بیز 32
☜تابع توزیع احتمال F(x)- تابع احتمال(چگالی) f(x) 35
☜متغیر تصادفی Random Variable 35
☜ 35
☜تابع توزیع Distribution Function 35
☜خواص تابع توزیع 35
☜تابع احتمال (چگالی): 35

☜رابطه تابع توزیع با تابع چگالی احتمال ... 36
☜امید ریاضی ... 41
☜توزیع های مهم ... 44
☜آزمایش برنولی ... 44
☜توزیع دوجمله ای ... 44
☜توزیع پواسن ... 44
☜توزیع نرمال ... 44
☜ ... 44
☜طریقه استفاده از جدول نرمال ... 45
☜توزیع نرمال استاندارد ... 45
☜حالت اول توزیع نرمال : ... 50
☜حالت دوم توزیع نرمال : ... 50
☜توزیع t-student ... 53
☜دیگر توزیع ها ... 53
☜توزیع هندسی توزیع فوق هندسی ... 53
☜توزیع تی t توزیع کای مربع توزیع F ... 53
☜احتمال توام ... 55
☜امیدهای ریاضی مخصوص ... 59
☜**ضریب همبستگی ... 60

☜خواص واریانس 60 ....
☜** نامساوی مارکف 61 ....
☜** نامساوی چبی شف 61 ....
☜توابع متغیر تصادفی : 63 ....
☜** قضیه حد مرکزی 65 ....
☜حالت دوم توزیع نرمال : 65 ....
☜حالت سوم توزیع نرمال : 67 ....
☜** برآورد فاصله ای 68 ....
☜ 68 ....
☜حل مسائل برآورد فاصله ای 68 ....
☜** آزمون فرضها : 69 ....
☜حل مسائل آزمون فرضها 69 ....
☜مدل مهره و جعبه 71 ....
☜1- مهره متمایز مهره مکرر مجاز 71 ....
☜2- مهره متمایز مهره مکرر غیرمجاز 71 ....
☜3- مهره غیرمتمایز مهره مکرر غیرمجاز 72 ....
☜4- مهره غیرمتمایز مهره مکرر مجاز 72 ....
☜مثالهایی از احتمال شرطی 73 ....
کامپیوتر و توابع اکسل و آمار و احتمالات........ 75
☜ 75 ....
☜ 76 ....

☜ ... 76
☜ ... 76
☜ ... 76
☜فرمولهای احتمال در مجموعه ها ... 80
☜نمونه سوال و حل آنها) ... 81