

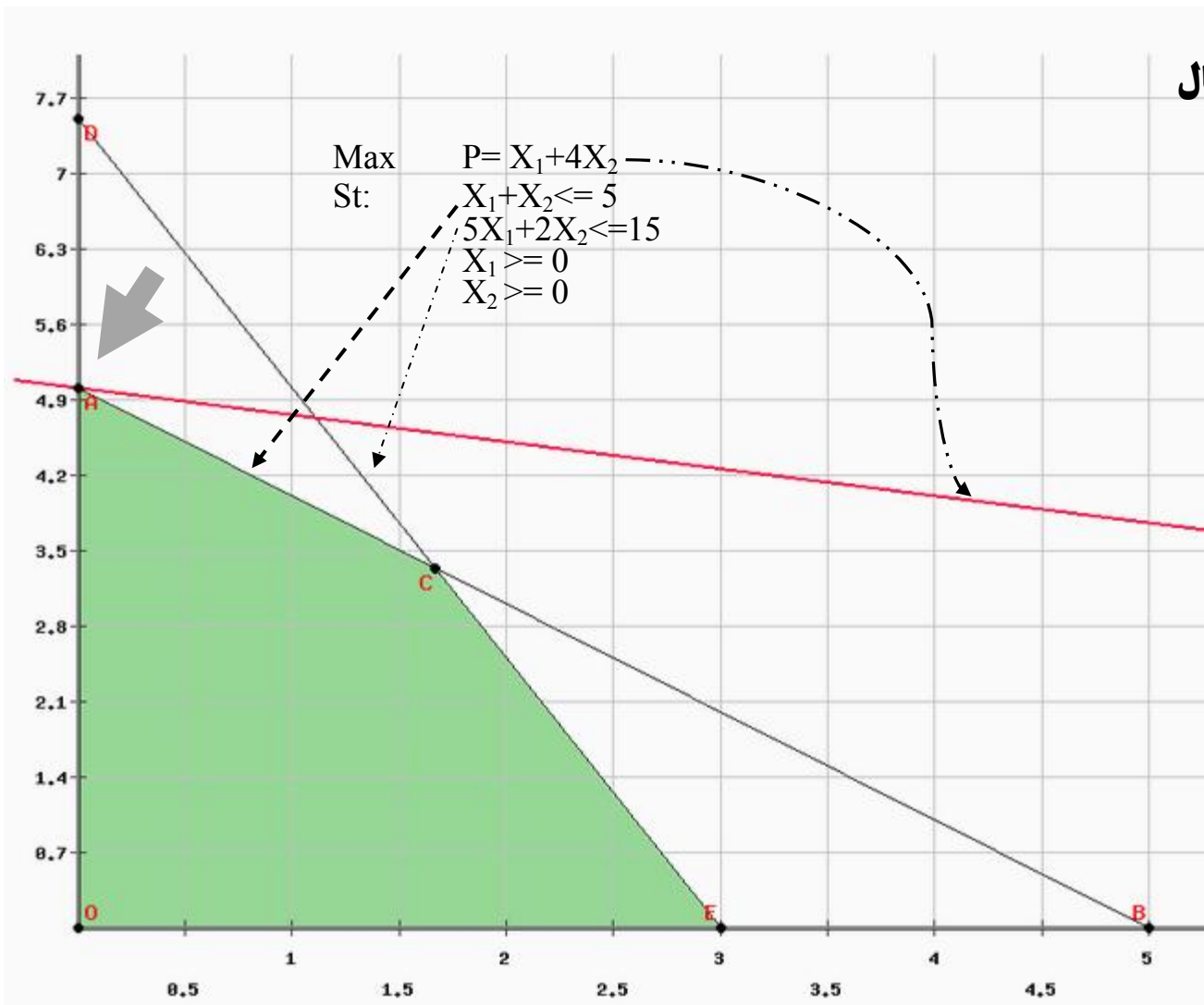
تحقیق در عملیات مقدماتی

روشهای حل مسائل تحقیق در عملیات مقدماتی

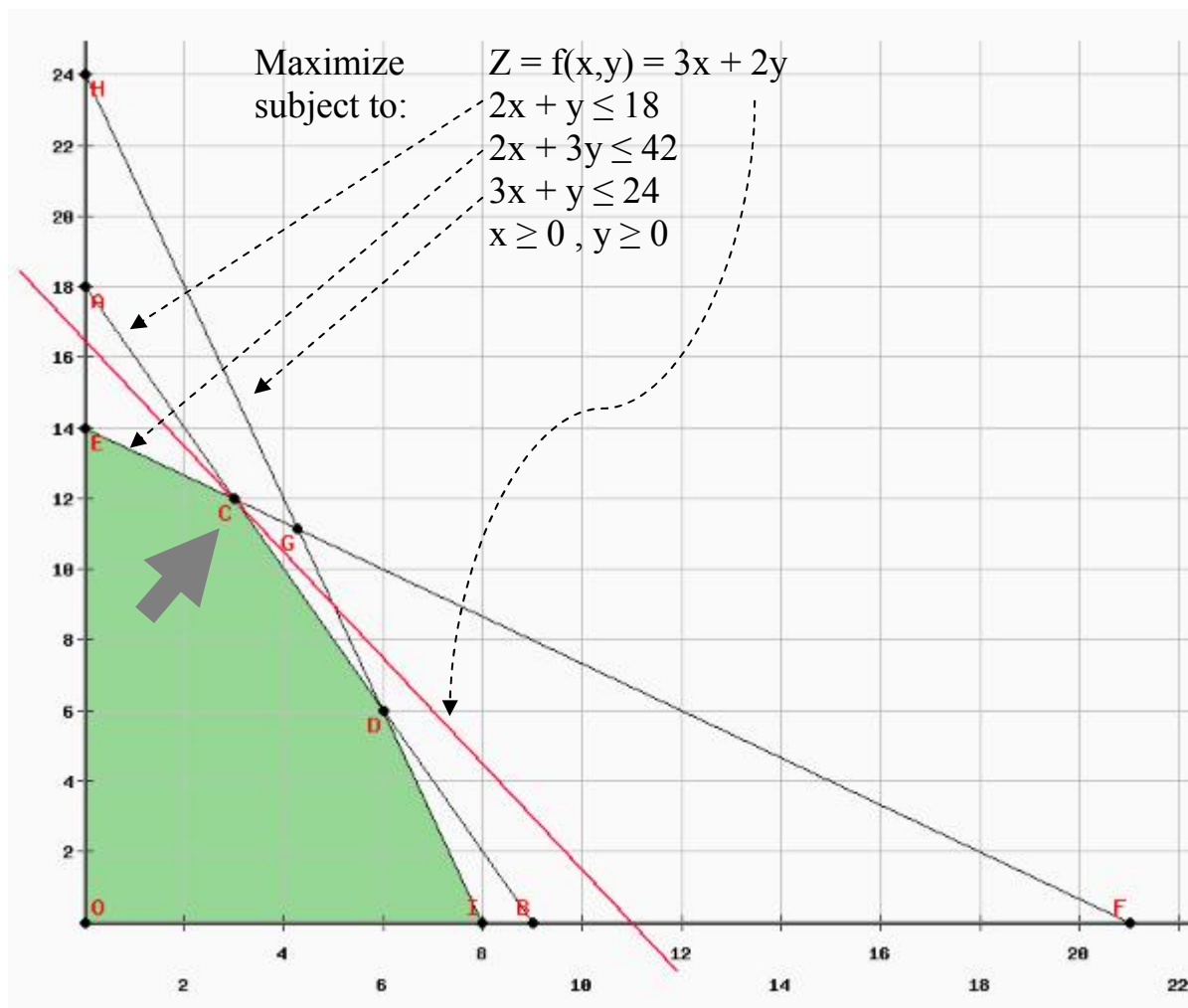
- ۱- ترسیمی
- ۲- روش سیمپلکس
- ۳- روش -M
- ۴- روش دووال

روش ترسیمی

مثال



مثال :



از سایتهایی مثل www.phpsimplex.com و www.zweigmedia.com و نرم افزار اکسل هم میتوان استفاده نمود

مثال ۱

در کارخانه ای دو نوع محصول با استفاده از دو ماشین تهیه میشود. ماشین اول دارای محدودیت زمانی ۵ ساعت در روز و ماشین دوم ۱۵ ساعت در روز میباشد. هر یک واحد محصول اول ۱ ساعت از ماشین اول و ۵ ساعت از ماشین دوم و ۱ تومان سود دارد و دومی بترتیب ۱ ساعت و ۲ ساعت و ۴ تومان سود دارد چه محصولی تولید شود با صرفه است؟

$$\begin{aligned} \text{Max } P &= X_1 + 4X_2 \\ \text{St: } X_1 + X_2 &\leq 5 \\ 5X_1 + 2X_2 &\leq 15 \end{aligned}$$

لازم بتذکر است که $X_1 \geq 0$ و $X_2 \geq 0$

مثالهایی از تحقیق در عملیات مقدماتی و پیشرفته

۱- تمام متغیرها بسمت چپ و اعداد ثابت بسمت راست میاوریم

تابع هدف $P - X_1 - 4X_2 = 0$
 محدودیت ها $+X_1 + X_2 \leq 5$
 $+5X_1 + 2X_2 \leq 15$

۲- نامساویها با متغیر مجازی مساوی میکنیم

تابع هدف $P - X_1 - 4X_2 = 0$
 محدودیت ها $+X_1 + X_2 + X_{s1} = 5$
 $+5X_1 + 2X_2 + X_{s2} = 15$

۳- (مرحله عملیات شروع) بعد از تشکیل جدول در سطر شماره ۲ (سطر تابع هدف) منفی ترین عدد را انتخاب و

آنرا ستون محور قرار داده و متغیر مربوطه (در اینجا X_2) متغیر ورود به پایه میباشد

1	1	2	3 ↓	4	5	6	7
		X_1	X_2	X_{s1}	X_{s2}	Cte	Ratio
2	P	-1	-4	0	0	0	
3	X_{s1}	1	1	1	0	5	
4	X_{s2}	5	2	0	1	15	

۴- از تقسیم ستون ثابت Cte (ستون ۶) بر ستون محور (نوشتن جواب در ستون Ratio) کمترین حاصل

تقسیم مثبت را مشخص و سطر مربوط به آنرا مشخص میکنیم سطر محور نامیده و متغیر مربوط به این

سطر محور متغیر خروجی

1	1	2	3 ↓	4	5	6	7
		X_1	X_2	X_{s1}	X_{s2}	Cte	Ratio
2	P	-1	-4	0	0	0	
3	← X_{s1}	1	1	1	0	5	$5/1=5$ ↔
4	X_{s2}	5	2	0	1	15	$15/2=7.5$

در این جدول نقطه تقاطع ستون لولا و سطر لولا را نقطه لولا مینامیم

مثالهایی از تحقیق در عملیات مقدماتی و پیشرفته

۵- سطر محور را بر عددی تقسیم میکنیم که نقطه محور یک شود (همه این سطر بر عدد نقطه محور تقسیم) و در یک جدول جدید مینویسیم

1	1	2	3↓	4	5	6	7
		X_1	X_2	X_{s1}	X_{s2}	Cte	Ratio
2	P	-1	-4	0	0	0	
3	$\leftarrow X_{s1}$	1	1	1	0	5	$5/1=5 \leftarrow$
4	X_{s2}	5	2	0	1	15	$15/2=7.5$
5	P	3	0	4	0	20	
6	X_2	1	1	1	0	5	
7	X_{s2}	3	0	-2	1	5	

در ستون محور عدد نقطه محور در عددی (مثبت یا منفی) ضرب و با اعداد دیگر این ستون جمع تا مقدار این اعداد دیگر صفر شود تا نهایتاً غیر از عدد یک در نقطه محور بقیه اعداد این ستون صفر شوند و کلیه سطرها باید متناسباً انجام شود

۶- اگر سطر ۵ اعداد منفی نداشت جواب بهینه است و گزینه مجدداً شبیه چندین سطر فوق (مرحله عملیات

شروع) ادامه میدهیم

1	1	2	3↓	4	5	6	7
		X_1	X_2	X_{s1}	X_{s2}	Cte	Ratio
2	P	-1	-4	0	0	0	
3	$\leftarrow X_{s1}$	1	1	1	0	5	$5/1=5 \leftarrow$
4	X_{s2}	5	2	0	1	15	$15/2=7.5$
5	P	3	0	4	0	20	
6	X_2	1	1	1	0	5	
7	X_{s2}	3	0	-2	1	5	

حال چون در سطر ۵ عدد منفی نداریم بنابراین جواب بهینه است

$$P=20 \quad X_1=0 \quad X_2=5 \quad X_{s1}=0 \quad X_{s2}=5$$

ارزش سایه ای

از سطر ۵ فوق میتوان گفت که اگر یک واحد (یک ساعت) که به ماشین اول اضافه شود ۴ واحد (۴ هزار تومان) به سود اضافه میکند. و اضافه کردن ساعات کار ماشین دوم اثری در سود ندارد... به عدد ۴ ارزش سایه ای ماشین اول گویند.

تعیین جوابهای دوال

جواب بهینه = جواب بهینه دوال

ضرایب متغیرهای اصلی غیر پایه در سطر اول جواب بهینه = جواب متغیرهای اضافی پایه دوال

ضرایب متغیرهای اضافه غیر پایه در سطر اول جواب بهینه = جواب متغیرهای اصلی پایه دوال

در مثال فوق

$$C=20 \quad y_1=4 \quad y_2=0 \quad p_1=3 \quad p_2=0$$

مثال نمونه اول

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 4X_1 + 3X_2 \\ 2X_1 + 3X_2 &\leq 6 \\ -3X_1 + 2X_2 &\leq 3 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z - 4X_1 - 3X_2 &= 0 \\ 2X_1 + 3X_2 + S_1 &= 6 \\ -3X_1 + 2X_2 + S_2 &= 3 \\ X_1 &\geq 0 \quad S_1 \geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \quad S_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1	2	3	4	5	6	7	
	1	2↓	3	4	5	6	7
		x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	Cte	Ratio
1	Z	-4	-3	0	0	0	در این سطر بزرگترین منفی ستون خروجی میشود
2	← s ₁	2	3	1	0	6	در این ستون کوچکترین ← 6/2=3 عدد مثبت خروجی
3	s ₂	-3	2	0	1	3	3/-3=-1
4	Z	0	3	2	0	12	
5	X ₁	1	3/2	1/2	0/2	3	
6	s ₂	0	13/2	3/2	0	12	

در سطر Z منفی نداریم بنابراین جواب بهینه عبارت است از

$$Z=12 \quad x_1=3 \quad x_2=0 \quad s_1=0 \quad s_2=12$$

مثال نمونه دوم

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= X_1 + X_2 \\ X_1 + 1/2 X_2 &\leq 1 \\ X_1 + 1/3 X_2 &\leq 1 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z - X_1 - X_2 &= 0 \\ X_1 + 1/2 X_2 + S_1 &= 1 \\ X_1 + 1/3 X_2 + S_2 &= 1 \\ X_1 &\geq 0 \quad S_1 \geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \quad S_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1	1	2↓ x ₁	3 x ₂	4 s ₁	5 s ₂	6 Cte	7 Ratio
2	Z	-1	-1	0	0	0	در این سطر بزرگترین منفی ستون خروجی میشود چون شبیه هستند یکی انتخاب میکنیم
3	← s ₁	1	1/2	1	0	1	در این ستون کوچکترین عدد مثبت 1/1=1 ← چون نسبت ها مساوی بود یکی انتخاب
4	s ₂	1	1/3	0	1	1	1/1=1
5	Z	0	1/2	1	0	1	در این سطر بزرگترین منفی ستون خروجی میشود
6	X ₁	1	1/2	1	0	1	در این ستون کوچکترین نسبت با 1/(1/2)=2 ← عدد مثبت
7	s ₂	0	-1/6	-1	1	0	0/(-1/6)=0
5	Z	2	0	3	0	3	
6	X ₂	2	1	2	0	2	
7	S ₂	1/3	0	-2/3	1	1/3	

در سطر Z منفی نداریم بنابراین جواب بهینه عبارت است از

$$Z=2 \quad x_1=0 \quad x_2=2 \quad s_1=0 \quad s_2=1/3$$

مثالهایی از تحقیق در عملیات مقدماتی و پیشرفته

اگر از ابتدا دومی پایه میشد سریع جواب بدست میامد ??? مجدد بررسی شود

1		x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	Cte	Ratio
2	Z	-1	-1	0	0	0	در این سطر بزرگترین منفی ستون خروجی میشود چون شبیه هستند یکی انتخاب میکنیم
3	s ₁	1	1/2	1	0	1	در این ستون کوچکترین عدد ← 1/(1/2)=2 مثبت
4	←s ₂	1	1/3	0	1	1	1/(1/3)=3
5	Z	1	0	2	0	2	
6	X ₂	2	1	2	0	2	
7	S ₂	1	1/3	0	1	1	

در سطر Z منفی نداریم بنابراین جواب بهینه عبارت است از

$$Z=2 \quad x_1=0 \quad x_2=2 \quad s_1=0 \quad s_2=1/3$$

مثال دوم

$$\text{Min } C = 5y_1 + 15y_2$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 1$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$C - 5y_1 - 15y_2 = 0$$

$$y_1 + 5y_2 - p_1 = 1$$

$$y_1 + 2y_2 - p_2 = 4$$

$$C - 5y_1 - 15y_2 = 0$$

$$-y_1 - 5y_2 + p_1 = -1$$

$$-y_1 - 2y_2 + p_2 = -4$$

ابتدا متغیر خروج مشخص مینماییم (منفی ترین متغیر) در این مثال P2

سپس سطر مرتبط را سطر محور نامیم و سطر تابع هدف را بر این سطر محور تقسیم و کمترین نسبت را مشخص و

متغیر سطر مرتبط را متغیر ورود به پایه گویند.

سپس عملیات یکه نمودن را برای آن سطر و ستون انجام میدهم

آنقدر ادامه تا در ستون CV همه مثبت شوند

	$y_1 \downarrow$	y_2	p_1	p_2	cv
C	-5	-15	0	0	0
p_1	-1	-5	1	0	-1
$\leftarrow p_2$	-1	-2	0	1	-4
ratio	$-5/-1 \hat{u}$	$-15/-2$			
C	0	-5	0	-5	20
p_1	0	-3	1	-1	3
y_1	1	2	0	-1	4
ratio					

بنابراین جواب بهینه

$$C=20$$

$$y_1=4$$

$$y_2=0$$

$$p_1=3$$

$$p_2=0$$

تحقیق در عملیات پیشرفته

مثال - این تمرین را حل کنید

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 &\geq 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

حل : به روش M -

چون در محدودیتها جواب پایه نمیتوان پیدا کرد یک جواب مصنوعی میسازیم

$$\begin{aligned} Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 - Mx_{a1} - Mx_{a2} \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 - x_{s1} + x_{a1} &= 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 - x_{s2} + x_{a2} &= 2 \end{aligned}$$

در سطر Z کمترین عدد تعیین نموده و ستون آنرا مشخص میکنیم (ستون لولا) متغیر این ستون متغیر ورود به پایه است

نسبت اعداد ستون b بر ستون لولا را بدست آورده و سطر مربوط به کمترین نسبت را مشخص (سطر لولا) متغیر مربوط به این سطر متغیر خروج از پایه است

نسبت θ	C	X	b	-1 y1	-2 y2	-1 y3	0 ys1	0 ys2
6/5 ⇨	-M	Xa1 ←	6	2	5	<u>5</u>	-1	0
2/1	-M	Xa2	2	1	1	1	0	-1
کمترین در ستون	کمترین در سطر	Z	-8M	-	-	-	M	M
				3M+1	6M+2	6M+1 ↑		
6/2	-1	X3	6/5	2/5	5/5	5/5	-1/5	0
4/3 ⇨	-M	Xa2 ←	4/5	<u>3/5</u>	0	0	1/5	-1
		Z	-	-	1	0	-	M
			4/5M	3/5M+			1/5M	
			-6/5	3/5 ↑			+1/5	
	-1	X3	2/3	0	1	1	-1/3	2/3
	-1	X1	4/3	1	0	0	1/3	-5/3
		Z	-2	0	1	0	0	1

چون در سطر Z ضریب متغیرها عدد منفی نداریم پس بهینه است

بنابراین جواب بهینه

$$X_1 = 4/3$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = 2/3$$

$$Z = -2$$

مثال فوق با M بزرگ با شکلی دیگر

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 &\geq 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\geq 2 \\ Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 - MR_1 - MR_2 \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 - S_1 + R_1 &= 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 - S_2 + R_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 \\ \text{St } 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 &\geq 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\geq 2 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \\ X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 - MR_1 - MR_2 \\ \text{St } 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 - S_1 + R_1 &= 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 - S_2 + R_2 &= 2 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \\ X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 \\ \text{St } 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 - S_1 &= 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 - S_2 &= 2 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \\ X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 - MR_1 - MR_2 \\ R_1 &= 6 - 2X_1 - 5X_2 - 5X_3 + S_1 \\ R_2 &= 2 - X_1 - X_2 - X_3 + S_2 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \\ X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 - M(6 - 2X_1 - 5X_2 - 5X_3 + S_1) - M(2 - X_1 - X_2 - X_3 + S_2) \\ Z &= (-1 + 3M)X_1 + (-2 + 6M)X_2 + (-1 + 6M)X_3 - 8M - MS_1 - MS_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z + (1 - 3M)X_1 + (2 - 6M)X_2 + (1 - 6M)X_3 + MS_1 + MS_2 &= -8M \\ \text{St } 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 - S_1 + R_1 &= 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 - S_2 + R_2 &= 2 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \\ X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

	X_1	X_2	$X_3 \downarrow$	S_1	S_2	R_1	R_2	Cte	Ratio
Z	1-3M	2-6M	1-6M	+M	+M	0	0	-8M	
R_1	2	5	5	-1	0	1	0	6	$6/5 \leftarrow$
R_2	1	1	1	0	-1	0	1	2	$2/1$
Z	$3/5 - 3/5M \downarrow$	1	0	$1/5 - 1/5M$	+M	-	0	$-6/5 - 4/5M$	
X_3	$2/5$	$5/5$	1	$-1/5$	0	$1/5$	0	$6/5$	$(6/5)/(2/5)$
R_2	$3/5$	0	0	$1/5$	-1	$-1/5$	1	$4/5$	$(4/5)/(3/5) \leftarrow$
Z	0	1	0	0	1	M	M	-2	
X_3	0	1	1	$-1/3$	$2/3$	$17/15$	$-2/3$	$2/3$	
X_1	1	0	0	$1/3$	$-5/3$	$-1/3$	$5/3$	$4/3$	

مثال دیگری از M بزرگ

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 4X_1 + X_2 \\ \text{St } 3X_1 + X_2 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 &\geq 6 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 3 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } -Z &= -4X_1 - X_2 \\ \text{St } 3X_1 + X_2 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - S_1 &= 6 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 &= 3 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } -Z &= -4X_1 - X_2 - MR_1 - MR_2 \\ \text{St } 3X_1 + X_2 + R_1 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 &= 6 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 &= 3 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } -Z &= -4X_1 - X_2 - MR_1 - MR_2 \\ R_1 &= 3 - 3X_1 - X_2 \\ R_2 &= 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_1 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 &= 3 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$-Z = -4X_1 - X_2 - M(3 - 3X_1 - X_2) - M(6 - 4X_1 - 3X_2 + S_1) = -4X_1 - X_2 - 3M + 3MX_1 + MX_2 - 6M + 4MX_1 + 3MX_2 - MS_1$$

$$-Z = (-4 + 7M)X_1 + (-1 + 4M)X_2 - 9M - MS_1$$

$$\text{MAX } -Z + (4 - 7M)X_1 + (1 - 4M)X_2 + MS_1 = -9M$$

$$\begin{aligned} \text{St } 3X_1 + X_2 + R_1 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 &= 6 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 &= 3 \\ X_1 &\geq 0 \\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

	$X_1 \downarrow$	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Cte	Ratio
Z	4-7M	1-4M	+M	0	0	0	-9M	
R_1	3	1	0	0	1	0	3	3/3 ⇐
R_2	4	3	-1	0	0	1	6	6/4
S_2	1	2	0	1	0	0	3	3/1
Z	0	-1/3- 5/3M↓	+M	0	- 4/3+7/ 3M	0	-4-2M	
X_1	1	1/3	0	0	1/3	0	3/3	3
R_2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	6/5 ⇐
S_2	0	5/3	0	0	-1/3	0	2	6/5
Z		0	-1/5	0	8/5+M	1/5+M	-18/5	
X_1		0	1/5	0	3/5	-1/5	3/5	
R_2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5	
S_2		0	1	0	1	-1	0	

مثال -

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 &\geq 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

حل : به روش دو فاز

یک تابع هدف مصنوعی میسازیم

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z^* &= && -X_{a1} - X_{a2} \\ &2X_1 + 5X_2 + 5X_3 - X_{s1} &+ X_{a1} &\geq 6 \\ &X_1 + X_2 + X_3 &- X_{s2} &+ X_{a2} \geq 2 \end{aligned}$$

در سطر Z^* کمترین عدد بعنوان ورود به پایه و ستون مربوطه ستون لولا نامیم و متغیر مربوط به این سطر متغیر متغیر ورود به پایه است

کمترین نسبت b' بر ستون لولا را مشخص و سطر مربوطه سطر لولا نامیم و متغیر مربوطه متغیر خروج از پایه میباشد.

		ضرایب در هدف		0	0	0	0	0
نسبت θ	C	X	b'	y_1	y_2	y_3	y_{s1}	y_{s2}
$6/5 \Rightarrow$	-1	X_{a1}	6	2	5	5	-1	0
		\leftarrow						
2/1	-1	X_{a2}	2	1	1	1	0	-1
کمترین در ستون	کمترین در سطر	Z^*	-8	-3	-6	-6 \uparrow	1	1
6/2	0	X_3	6/5	2/5	5/5	1	-1/5	0
$4/3 \Rightarrow$	-1	X_{a2}	4/5	3/5	0	0	1/5	-1
		\leftarrow						
		Z^*	-4/5	-3/5 \uparrow	0	0	-1/5	1
	0	X_3	2/3	0	1	1	-1/3	2/3
	0	X_1	4/3	1	0	0	1/3	-5/3
		Z^*	0	0	0	0	0	0

چون سطر $Z^* = 0$ گردید این یک جواب برای Z میباشد

			-1	-2	-1	0	0
			ضرایب در هدف				
			y1	y2	y3	ys1	ys2
-1	X3	2/3	0	1	1	-1/3	2/3
-1	X1	4/3	1	0	0	1/3	-5/3
	Z	-2	0	1	0	0	1

چون در سطر Z ضرایب متغیرها غیر منفی است پس بهینه است

$$X1=4/3$$

$$X2=0$$

$$X3=2/3$$

$$Z = -2$$

مثال -

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 &\geq 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

حل : به روش دوال

$$\begin{aligned} Z + X_1 + 2X_2 + X_3 &= 0 \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 - X_{s1} &= 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 - X_{s2} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + X_1 + 2X_2 + X_3 &= 0 \\ -2X_1 - 5X_2 - 5X_3 + X_{s1} &= -6 \\ -X_1 - X_2 - X_3 + X_{s2} &= -2 \end{aligned}$$

در ابتدا در ستون **b** کمترین عدد مشخص و سطر مربوطه سطر لولا نامند و متغیر مربوطه متغیر خروج از پایه میباشد سطر Z بر آن ستون تقسیم و کمترین نسبت تقسیم را مشخص و ستون مربوطه ستون لولا گویند و متغیر مربوطه متغیر ورود به پایه نامند

C	X	b	y1↓	y2	y3	ys1	ys2
0	Xs1	-6 ←	-2	-5	-5	1	0
0	Xs2	-2	-1	-1	-1	0	1
	Z	0	1	2	1	0	0
سطر نسبت θ	کمترین در؛ سطر	کمترین در ستون	1/- 2↑	2/-5	1/-5		
-1	X1	-6/-2	1	-5/-2	-5/-2	1/-2	0
0	Xs2	1 ←	0	1.5	1.5	-0.5	1
	Z	-3	0	-0.5	-1.5	0.5	0
				- 0.5/1.5	- 1.5/1.5 ↑	0.5/0.5	0/1
-1	X1	4/3	1	0	0	1/3	-5/3
-1	X3	2/3	0	1	1	-1/3	2/3
	Z	-2	0	1	0	1	1

چون در سطر Z عدد منفی نداریم و در ستون عدد ثابت عدد منفی نداریم پس جواب بهینه است.

$$X_1 = 4/3 \quad X_2 = 0 \quad X_3 = 2/3 \quad Z = -2$$

مثال

$$\begin{aligned} \text{Max : } Z &= -X_1 - 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 &\geq 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

حل به روش سیمپلکس اصلاح شده

$$\text{Max : } Z^* = -X_{a1} - X_{a2}$$

$$\begin{aligned} Z + X_1 + 2X_2 + X_3 &= 0 \\ Z^* + X_{a1} + X_{a2} &= 0 \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 - X_{s1} + X_{a1} &= 6 \\ X_1 + X_2 + X_3 - X_{s2} + X_{a2} &= 2 \end{aligned}$$

یک مثال از نحوه محاسبه

$$ZB \quad (1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad ZB = 0$$

$$Z^*B \quad (0, 1, -1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 \quad Z^*B = -8$$

a_1	a_2	a_3	s_1	s_2	b
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Z_j - C_j$ تشکیل می‌دهیم که اگر منفی نداشت یعنی جواب بهینه است در سطر Z^* میتوان ملاحظه نمود $(0, 1, -1, -1)$ پس میتوان نوشت

$$j=1 \quad (0, 1, -1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \quad Z_1 - C_1 = -3$$

و بهمین نحوه برای دیگر موارد آنگاه جدول ذیل حاصل میشود

j	1	2↓	3	S1	S2
---	---	----	---	----	----

$$Z_j - C_j \quad -3 \quad \underline{-6} \quad -6 \quad 1 \quad 1$$

منفی ترین انتخاب میکنیم - اگر متغیر ۳ وارد پایه شود سریعتر به جواب میرسیم ولی فرض کنید متغیر دوم ورود به پایه باشد

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

θ	X	b	β_0	β_1	β_2	β_3	y2
	Z	0	1	0	0	0	2
کمترین	Z*	-8	0	1	-1	-1	-6
در ستون							
6/5	Xa1	6	0	0	1	0	5
	\leftarrow						
2/1	Xa2	2	0	0	0	1	1
	Z	-	1	0	-2/5	0	0
		12/5					
	Z*	-4/5	0	1	1/5	-1	0
	X2	6/5	0	0	1/5	0	5/5
	Xa2	4/5	0	0	-1/5	1	0

مجدداً $Z_j - C_j$ تشکیل می‌دهیم که اگر منفی نداشت یعنی جواب بهینه است در سطر Z^* میتوان ملاحظه نمود (0 , 1 , 1/5 , -1) پس میتوان نوشت

$$j=1 \quad (0, 1, 1/5, -1) \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3/5 = -0.6 \quad Z_1 - C_1 = -0.6$$

$$j=2 \quad (0, 1, 1/5, -1) \begin{pmatrix} a_2 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad Z_2 - C_2 = 0$$

و بهمین نحوه برای دیگر موارد آنگاه جدول ذیل حاصل میشود

j	1↓	2	3	S1	S2
Zj-Cj	-0.6	0	0	1	1

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.6 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

جدول آخری را نوشته ستون y_1 اضافه میشود (y_1 می‌خواهیم وارد پایه کنیم)

θ	X	b	β_0	β_1	β_2	β_3	y1
کمترین در ستون	Z	-12/5	1	0	-2/5	0	0.2
	Z*	-4/5	0	1	1/5	-1	-0.6
(6/5) / 0.4 = 3	X2	6/5	0	0	1/5	0	0.4
(4/5) / 0.6=1.33	Xa2 ←	4/5	0	0	-1/5	1	0.6
	Z	-8/3	1	0	-1/3	-1/3	0
	Z*	0	0	1	0	0	0
	X2	2/3	0	0	1/3	-2/3	0
	X1	0.8/0.6= 4/3	0	0	-0.2/0.6=- 1/3	1/0.6=5 /3	0.6 / 0.6=1

با توجه به جدول (در سطر Z^*) وارد فاز ۲ میشویم و از این به بعد از Z استفاده میکنیم
مجدداً $Z_j - C_j$ تشکیل میدهم که اگر منفی نداشت یعنی جواب بهینه است
در سطر Z میتوان ملاحظه نمود ($1, 0, -1/3, -1/3$) پس میتوان نوشت

$$j=1 \quad (1, 0, -1/3, -1/3) \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad Z1 - C1 = 0$$

$$j=2 \quad (1, 0, -1/3, -1/3) \begin{pmatrix} a_2 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad Z2 - C2 = 0$$

و بهمین نحوه برای دیگر موارد آنگاه جدول ذیل حاصل میشود

j	1	2	3↓	S1	S2
Zj-Cj	0	0	<u>-1</u>	1/3	1/3

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثالهایی از تحقیق در عملیات پیشرفته

θ	X	b	β_0	β_1	β_2	β_3	y_3
	Z	-8/3	1	0	-1/3	-1/3	-1
کمترین در	Z*	0	0	1	0	0	0
ستون							
$(2/3)/1=$ $2/3$	X2 \leftarrow	2/3	0	0	1/3	-2/3	1
$(4/3)/0=$ بینهایت	X1	4/3	0	0	-1/3	5/3	0
	Z	-2	1	0	0	-1	0
	Z*	0	0	1	0	0	0
	X3	2/3	0	0	1/3	-2/3	1
	X1	4/3	0	0	-1/3	5/3	0

مجدداً $Z_j - C_j$ تشکیل می‌دهیم که اگر منفی نداشت یعنی جواب بهینه است در سطر Z میتوان ملاحظه نمود (-1 , 0 , 0 , 1) پس میتوان نوشت

$$j=1 \quad (1, 0, 0, -1) \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad Z_1 - C_1 = 0$$

$$j=2 \quad (1, 0, 0, -1) \begin{pmatrix} a_2 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad Z_2 - C_2 = 1$$

و بهمین نحوه برای دیگر موارد آنگاه جدول ذیل حاصل میشود

j	1	2	3	S1	S2
Zj-Cj	0	1	0	0	1

چون در $Z_j - C_j$ عدد منفی نداریم پس جواب بهینه است

$$X_1 = 4/3 \quad X_2 = 0 \quad X_3 = 2/3 \quad Z = -2$$

برنامه ریزی پارامتریک

(ضرایب برنامه ریزی خطی بصورت پارامتری تغییر دهیم)

صاحب یک کارگاه با ترکیب دو نوع فلز کاری و چوبکاری سه نوع کالا انجام میدهد بشرح جدول زیر - در یک دوره زمانی ظرفیت چوبکاری ۲۴ نفر ساعت و ظرفیت فلزکاری ۶۰ نفر ساعت میباشد - بیشترین سود را برنامه ریزی کنید

حد اکثر منبع	کالای ۱	کالای ۲	کالای ۳	میزان مصرف در هر کالا
24	1/2	2	1	چوبکاری
60	1	2	4	فلزکاری
	6	14	13	سود

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 6X_1 + 14X_2 + 13X_3 & z - 6X_1 - 14X_2 - 13X_3 &= 0 \\ 1/2X_1 + 2X_2 + X_3 &\leq 24 & 1/2X_1 + 2X_2 + X_3 + 1X_4 + 0X_5 &= 24 \\ 1X_1 + 2X_2 + 4X_3 &\leq 60 & 1X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 0X_4 + 1X_5 &= 60 \\ X_1 &\geq 0 & X_2 &\geq 0 & X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
X ₄	24	1/2	2	1	1	0
X ₅	60	1	2	4	0	1
Z	0	-6	-14	-13	0	0

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Ratio
X ₄	24	1/2	2	1	1	0	ب - کمترین نسبت 24/2 خروجی
X ₅	60	1	2	4	0	1	60/2
Z	0	-6	-14	-13	0	0	الف - منفی ترین خروجی

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Ratio
X ₂	24/2	1/2/2	2/2	1/2	1/2	0/2	سلول را یکه میکنیم
X ₅	60	1	2	4	0	1	
Z	0	-6	-14	-13	0	0	

مثالهایی از تحقیق در عملیات پیشرفته

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Ratio
X ₂	12	1/4	1	1/2	1/2	0	12/(1/2)=24
X ₅	36	1/2	0	3	-1	1	ب- کمترین 36/3=12
Z	168	-5/2	0	-6	7	0	الف- منفی ترین -۶

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Ratio
X ₂	12	1/4	1	1/2	1/2	0	12/(1/2)=24
X ₅	36	1/2	0	3	-1	1	ب- کمترین 36/3=12
Z	168	-5/2	0	-6	7	0	الف- منفی ترین -۶

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Ratio
X ₂	6	2/12	1	0	4/6	-1/6	12/(1/2)=24
X ₃	36/3	1/2/3	0/3	1	-1/3	1/3	ب- کمترین 36/3=12
Z	168+72	-3/2	0	0	5	2	الف- منفی ترین -۶

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Ratio
X ₂	6	1/6	1	0	2/3	-1/6	ب- کمترین 6/(1/6)=36 خروجی
X ₃	12	1/6	0	1	-1/3	1/3	12/(1/6)=72
Z	240	-3/2	0	0	5	2	الف منفی ترین -۳/۲

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Ratio
X ₁	36	1	6	0	4	-1	
X ₃	6	0	-1	1	-1	1/2	
Z	240+36*(3/2)	0	9	0	11	1/2	

متغیر پایه	سمت راست	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Ratio
X ₁	36	1	6	0	4	-1	
X ₃	6	0	-1	1	-1	1/2	
Z	294	0	9	0	11	1/2	

الف) برنامه ریزی پارامتریک سمت راست

حال فرض کنید صاحب کارگاه قادر است هرساعت ظرفیت چوبکاری را به یک ساعت ظرفیت فلزکاری تبدیل کند و بالعکس

صاحب کارگاه میخواهد بداند ظرفیتهای را به چه میزان تغییر دهد تا بیشترین سود عاید شود پس جدول اولیه چنین میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_4	$24+t$	$\frac{1}{2}$	2	1	1	0
X_5	$60-t$	1	2	4	0	1
Z	0	-6	-14	-13	0	0

طبق جداول فوق در حین حل ستون راست چنین تغییراتی داشت

متغیر پایه	سمت راست				
X_4	$24=A$	$A/2=A1$	$B2*(-1/2)+A1=A2$	$A2/(1/6)=A3$	
X_5	$60=B$	$A1*2+B=B1$	$B1/3=B2$	$B2+A3*(-1/6)$	
Z	$0=C$	$A1*14=Z2$	$Z2+(B2*6)=Z3$	$Z3+A3*(3/2)$	

بنا بر شرح فوق جدول نهایی با شرح فوق چنین میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_1	$36+5t$	1	6	0	4	-1	
X_3	$6-3/2t$	0	-1	1	-1	$\frac{1}{2}$	
Z	$294+21/2t$	0	9	0	11	$1/2$	

حال باید

$$36-5t \geq 0 \quad 6-2/3t \geq 0 \quad -7 \frac{1}{5} \leq t \leq 4$$

حال اگر $t \leq -7 \frac{1}{5}$ باشد در جدول فوق X_5 وارد پایه شده و X_1 خارج میشود و نهایتاً جدول بصورت زیر میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Ratio
X_5	$-36-5t$	-1	-6	0	-4	1	
X_3	$24+t$	$1/2$	1	1	1	0	
Z	$312+13t$	$1/2$	12	0	13	0	

حال

$$-36-5t \geq 0 \quad 24+t \leq 0 \quad -24 \leq t \leq -7 \frac{1}{5} \quad z=312+13t$$

برای $t=4$ بیشترین Z را خواهیم داشت
یعنی چهار ساعت از فلزکاری کم و به چوبکاری اضافه شود سود بیشتر میشود

ب) برنامه ریزی پارامتریک تابع هدف

اگر در تمرین اولیه فوق فرض کنیم یک واحد افزایش قیمت X_1 معادل دو واحد افزایش قیمت X_2 و X_3 بشود نقطه بهینه Z کجاست

جدول بصورت زیر میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_4	24	$\frac{1}{2}$	2	1	1	0
X_5	60	1	2	4	0	1
Z	0	-6-T	-14-2T	-13-2T	0	0

که نهایتاً بصورت زیر میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	36	1	6	0	4	-1
X_3	6	0	-1	4	-1	$\frac{1}{2}$
Z	$294+48T$	0	$9+2T$	0	$11+2T$	$\frac{1}{2}$

$$9+2T \geq 0 \quad 11+2T \geq 0 \quad -4/5 \leq T \leq \text{INF} \quad Z=294+48T$$

برای $T \leq -4/5$ جدول بصورت زیر میشود

متغیر پایه	سمت راست	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_2	6	-1/6	1	0	$\frac{2}{3}$	-1/6
X_3	12	$\frac{1}{6}$	0	1	-1/3	$\frac{1}{2}$
Z	$240+36T$	$-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}T$	0	0	$5+\frac{2}{3}T$	$2+\frac{T}{3}$

نموداری محدب میشود

حمل و نقل

روش گوشه شمال غربی

کارخانه ای سه محصول تولید و عرضه میکند ($S_1=7, S_2=9, S_3=18$) در چهار محل تقاضا برای مصرف داریم ($D_1=5, D_2=8, D_3=7, D_4=14$) هزینه حمل در جدول زیر آمده - برای حمل کل کالا از منبع به مقصدها به طوریکه هزینه حداقل شود چه مقدار به چه محل انجام شود

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	19	30	50	10	7
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	7	14	18
D تقاضا	5	8	7	14	34 - 34

در سطر و ستون عرضه و تقاضا مرتبط با این گوشه شمال غربی حداقل بین عرضه و تقاضا در نظر میگیریم بین ۷ و ۵ کمترین مقدار انتخاب و در سلول D_1S_1 گذارده و سپس در ستون عرضه و تقاضای مرتبط اختلاف با این مقدار درج میکنیم

	D_1	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	5	30	50	10	$7-5=2$
S_2	70	30	40	60	9
S_3	40	8	7	14	18
D تقاضا	5- 5=0	8	7	14	(34-5) (34-5)

حال سطر یا ستون صفر شده را حذف میکنیم (ستون D_1 را حذف میکنیم)

	D_2	D_3	D_4	عرضه S
S_1	30	50	10	2
S_2	30	40	60	9
S_3	8	7	14	18
D تقاضا	8	7	14	(29) (29)

در سطر و ستون عرضه و تقاضا مرتبط با این گوشه شمال غربی حداقل بین عرضه و تقاضا در نظر میگیریم بین ۲ و ۸ کمترین مقدار انتخاب و در سلول D_2S_1 گذارده و سپس در ستون عرضه و تقاضای مرتبط اختلاف با این مقدار درج میکنیم

	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	2	50	10	2-2
S ₂	30	40	60	9
S ₃	8	7	14	18
D تقاضا	8-2	7	14	(29-2) (29-2)

حال سطر یا ستون صفر شده را حذف میکنیم (سطر S₁ را حذف میکنیم)

	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	30	40	60	9
S ₃	8	7	14	18
D تقاضا	6	7	14	(27) (27)

در سطر و ستون عرضه و تقاضا مرتبط با این گوشه شمال غربی حداقل بین عرضه و تقاضا در نظر میگیریم بین 6 و 9 کمترین مقدار انتخاب و در سلول D₂S₂ گذارده و سپس در ستون عرضه و تقاضای مرتبط اختلاف با این مقدار درج میکنیم

	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	6	40	60	9-6
S ₃	8	7	14	18
D تقاضا	6-6	7	14	(27-6) (27-6)

حال سطر یا ستون صفر شده را حذف میکنیم (سطر S₁ را حذف میکنیم)

	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	40	60	3
S ₃	7	14	18
D تقاضا	7	14	(21) (21)

واین روش را ادامه میدهیم

	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	3	60	3-3
S ₃	7	14	18
D تقاضا	7-3	14	(21-3) (21-3)

	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₃	7	14	18
D تقاضا	4	14	(18) (18)

	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₃	4	14	18-4
D تقاضا	4-4	14	(18-4) (18-4)

	D ₄	عرضه S
S ₃	14	14
D تقاضا	14	(14) (14)

پس

$$S3D4=14 \quad S3D3=4 \quad S2D3=3 \quad S2D2=6 \quad S1D2=2 \quad S1D1=5$$

$$\text{Cost} = 5*19 + 2*30 + 6*30 + 3*40 + 4*70 + 14*20 = 1015$$

روش مینیمم سطر

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	19	30	50	10	7
S ₂	70	30	40	60	9
S ₃	40	8	70	20	18
D تقاضا	5	8	7	14	34 – 34

بترتیب از سطر اول شروع کرده و در این سطر به آن سلول که دارای هزینه مینیمم مقدار مینیمم بین عرضه و تقاضا (7) به سلول تخصیص می‌دهیم و بقیه تقاضا در این سطر صفر می‌گذاریم

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	0	0	0	7	7-7=0
S ₂	70	30	40	60	9
S ₃	40	8	70	20	18
D تقاضا	5	8	7	14-7	(34-7) – (34-7)

$$S1D4=7$$

سطر اول S1 را حذف در نظر گرفته و به سطر بعدی S2 توجه می‌کنیم در این سطر به آن سلول که دارای هزینه مینیمم است مقدار مینیمم بین عرضه و تقاضا (8) به سلول تخصیص می‌دهیم و بقیه تقاضا در این ستون صفر می‌گذاریم

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	70	30	40	60	9
S ₃	40	8	70	20	18
D تقاضا	5	8	7	7	(27) – (27)

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	70	8	40	60	9-8
S ₃	40	0	70	20	18
D تقاضا	5	8-8	7	7	(27-8) – (27-8)

$$S2D2=8$$

مثالهایی از تحقیق در عملیات پیشرفته

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	70	8	40	60	1
S ₃	40	0	70	20	18
D تقاضا	5	0	7	7	(19) – (19)

ستون دوم D₂ را حذف در نظر گرفته و مجدداً به سطر دوم S₂ توجه میکنیم در این سطر به آن سلول که دارای هزینه مینم است مقدار مینیمم بین عرضه و تقاضا (1) به سلول تخصیص میدهیم و بقیه تقاضا در این سطر صفر میگذاریم

	D ₁	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	70	40	60	1
S ₃	40	70	20	18
D تقاضا	5	7	7	(19) – (19)

	D ₁	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₂	0	1	0	1-1
S ₃	40	70	20	18
D تقاضا	5	7-1	7	(19-1) – (19-1)

$$S_2D_3=1$$

سطر دوم S₂ را حذف در نظر گرفته و به سطر سوم S₃ توجه میکنیم در این سطر کل تقاضاهای مانده را تخصیص میدهیم

	D ₁	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₃	40	70	20	18
D تقاضا	5	6	7	(18) – (18)

	D ₁	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₃	5	6	7	18
D تقاضا	5	6	7	(18) – (18)

بنابراین جواب مسئله بصورت زیر است

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁				7	7
S ₂		8	1		9
S ₃	5		6	7	18
D تقاضا	5	8	7	14	

$$S1D4=7 \quad S2D2=8 \quad S2D3=1 \quad S3D1=5 \quad S3D3=6 \quad S3D4=7$$

$$\text{Cost} = 7*10+8*30+1*40+5*40+6*70+7*20=1110$$

روش گوشه شمال غربی و مینیمم سطر ملاحظه شد و ملاحظه شد که روش گوشه شمال غربی هزینه کمتری دارد

روش مینیمم ستون هم شبیه روش مینیمم سطر است

روش مینیمم سطر و ستون (ماتریس) و روش مجارستانی هم وجود دارد

روش ماتریس (مینیمم سطر و ستون)

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	19	30	50	10	7
S ₂	70	30	40	60	9
S ₃	40	8	70	20	18
D تقاضا	5	8	7	14	34 – 34

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	19	0	50	10	7
S ₂	70	0	40	60	9
S ₃	40	8	70	20	18-8
D تقاضا	5	8	7	14	34 – 34

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	0	0	0	7	7
S ₂	70	0	40	60	9
S ₃	40	8	70	20	10
D تقاضا	5	8	7	14	34 – 34

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	19	0	50	7	7
S ₂	70	0	40	0	9
S ₃	40	8	70	7	10
D تقاضا	5	8	7	14	34 – 34

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	19	0	0	7	7
S ₂	70	0	7	0	9
S ₃	40	8	0	7	18
D تقاضا	5	8	7	14	34 – 34

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	0	0	0	7	7
S ₂	2	0	7	0	9
S ₃	3	8	0	7	18
D	5	8	7	14	34 – 34
تقاضا					

جدول فوق جواب نهایی است

$$\text{Cost } 7*10+2*70+7*40+3*40+8*8+7*20 = 814$$

روش ووگل

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S
S ₁	19	30	50	10	7
S ₂	70	30	40	60	9
S ₃	40	8	70	20	18
D تقاضا	5	8	7	14	34 - 34

یک سطر بنام اختلاف بین کمترین هزینه آن سطر و یک هزینه بعدی آن محاسبه میکنیم
 یک ستون بنام اختلاف بین کمترین هزینه آن ستون و یک هزینه بعدی آن محاسبه میکنیم
 در این سطر و ستون اختلاف بزرگترین عدد اختلاف را مشخص کرده و در سطر یا ستون مرتبط به سلولی
 که کمترین مقدار را دارد تخصیص میدهیم

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S	اختلاف
S ₁	19	30	50	10	7	19-10=9
S ₂	70	30	40	60	9	40-30=10
S ₃	40	8	70	20	18	20-8=12
D تقاضا	5	8	7	14	34 - 34	
اختلاف	40-19=21	30-8=22	50-40=10	20-10=10		

در این سطر و ستون اختلاف بزرگترین عدد اختلاف 22 میباشد و در ستون D₂ مرتبط به سلول کمترین
 هزینه S₃D₂ تخصیص 8 میدهیم

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S	اختلاف
S ₁	19	0	50	10	7	9
S ₂	70	0	40	60	9	10
S ₃	40	8	70	20	18-8=10	12
D تقاضا	5	8-8=0	7	14	34 - 34	
اختلاف	21*	22*	10	10		

در سطر و ستون اختلاف بعدی بزرگترین عدد اختلاف 21 میباشد و در ستون D₁ مرتبط به سلول کمترین
 هزینه S₁D₁ تخصیص 5 میدهیم

مثالهایی از تحقیق در عملیات پیشرفته

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S	اختلاف
S ₁	5	0	50	10	7-5=2	9
S ₂	0	0	40	60	9	10
S ₃	0	8	70	20	18-8=10	12
D تقاضا	5-5=0	8-8=0	7	14	34 - 34	
اختلاف	21**	22 *	10	10		

در سطر و ستون اختلاف بعدی بزرگترین عدد اختلاف 12 میباشد و در سطر S3 مرتبط به سلول کمترین هزینه S1D4 تخصیص 10 میدهیم

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S	اختلاف
S ₁	5	0	50	10	7-5=2	9
S ₂	0	0	40	60	9	10
S ₃	0	8	0	20-10=10	18-8-10=0	12***
D تقاضا	5-5=0	8-8=0	7	14-10=4	34 - 34	
اختلاف	21**	22 *	10	10		

در سطر و ستون اختلاف بعدی بزرگترین عدد اختلاف 10 میباشد و [چند سطر و چند ستون این اختلاف موجود است آن مورد انتخاب میکنیم که کمترین هزینه باشد (یا آن مسیری انتخاب میکنیم که بیشترین تخصیص را بتوانیم بدهیم)

به سلول کمترین هزینه S1D4 تخصیص 10 میدهیم

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S	اختلاف
S ₁	5	0	50	2	7-5-2=0	9
S ₂	0	0	40	60	9	10*
S ₃	0	8	0	10	18-8-10=0	12***
D تقاضا	5-5=0	8-8=0	7	14-10-2=2	34 - 34	
اختلاف	21**	22 *	10*	10*#		

در سطر و ستون اختلاف بعدی بزرگترین عدد اختلاف 10 میباشد و در چند سطر و چند ستون این اختلاف موجود است آن مورد انتخاب میکنیم که کمترین هزینه باشد (یا آن مسیری انتخاب میکنیم که بیشترین تخصیص را بتوانیم بدهیم)

به سلول کمترین هزینه S1D4 تخصیص 10 میدهیم

مثالهایی از تحقیق در عملیات پیشرفته

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S	اختلاف
S ₁	5	0	0	2	7-5-2=0	9
S ₂	0	0	7	60	9-7-2	10*#
S ₃	0	8	0	10	18-8-10=0	12***
D تقاضا	5-5=0	8-8=0	7-7=0	14-10-2=2	34 - 34	
اختلاف	21**	22 *	10*	10*#		

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	عرضه S	اختلاف
S ₁	5	0	0	2	7-5-2=0	9
S ₂	0	0	7	2	9-7-2=0	10*##
S ₃	0	8	0	10	18-8-10=0	12***
D تقاضا	5-5=0	8-8=0	7-7=0	14-10-2=2	34 - 34	
اختلاف	21**	22 *	10*	10*#		

$$\text{Cost } 5*19+2*10+7*40+2*60+8*8+10*20=779$$

روش مجاری

اگر تمامی اعداد هر سطر یا ستون به یک میزان افزایش یا کاهش یابد جواب بهینه این جدول همان جواب بهینه جدول اولیه خواهد بود

مثال - چهار ماشین به چهار محل با هزینه حمل داخل جدول را تخصیص دهید

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	میزان عرضه
S ₁	9	7	6	8	1
S ₂	5	4	2	7	1
S ₃	3	5	1	9	1
S ₄	5	10	3	4	1
⇒ میزان تقاضا	1	1	1	1	

کوچکترین عدد در هر سطر از سایر اعداد آن سطر کم میکنیم (بطوریکه در هر سطر یک صفر ظاهر شود)

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
S ₁	9-6	7-6	6-6	8-6
S ₂	5-2	4-2	2-2	7-2
S ₃	3-1	5-1	1-1	9-1
S ₄	5-3	10-3	3-3	4-3

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
S ₁	3	1	0	2
S ₂	3	2	0	5
S ₃	2	4	0	8
S ₄	2	7	0	1

در ستونی که حداقل یک صفر ندارد ، کوچکترین عدد در هر ستون از سایر اعداد آن ستون کم میکنیم

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
S ₁	3-2	1-1	0	2-1
S ₂	3-2	2-1	0	5-1
S ₃	2-2	4-1	0	8-1
S ₄	2-2	7-1	0	1-1

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
S ₁	1	0	0	1
S ₂	1	1	0	4
S ₃	0	3	0	7
S ₄	0	6	0	0

حداقل تعداد خطوط از صفرها عبور میدهیم اگر تعداد خطوط با تعداد عرضه یا تقاضا مساوی شود (4) . اعداد باقیمانده بهینه میشود

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
S ₁	1	0	0	1
S ₂	1	1	0	4
S ₃	0	3	0	7
S ₄	0	6	0	0

در جدول بالا تعداد خطوط ۴ و تعداد عرضه یا تقاضا هم ۴ میشود بنابراین جواب بهینه است
 جواب بهینه انتخاب صفرها است - ابتدا صفرهایی که در سطر و ستون متناظر خود کمترین صفر داشته باشند
 انتخاب میکنیم

$$S1D2=7$$

$$S3D1=3$$

$$S4D4=4$$

$$S2D3=2$$

$$\text{Cost} = 7+3+4+2=16$$

اگر تعداد خطوط ۴ نبود از بین اعدادی که خط نخورده اند کمترین عدد انتخاب و به اعداد در محل تقاطع
 اضافه میکنیم و از اعدادی که خط نخورده اند کسر میکنیم. خطوط را برداشته و مجددا در جدول حاصله حداقل
 خطوط رسم میکنیم و مثل قبل ادامه میدهیم

مثال دیگر از روش مجاری

	1	2	3	4
A	24	10	21	11
B	14	22	10	15
C	15	17	20	19
D	11	19	14	13

24-10	10-10	21-10	11-10
14-10	22-10	10-10	15-10
15-15	17-15	20-15	19-15
11-11	19-11	14-11	13-11

14	0	11	1
4	12	0	5
0	2	5	4
0	8	3	2

14	0	11	1-1
4	12	0	5-1
0	2	5	4-1
0	8	3	2-1

روی صفرها حداقل خط رسم میکنیم اگر تعداد خطوط برابر بعد شد (4) اعداد خط نخورده جواب بهینه میباشد

14	0	11	0
4	12	0	4
0	2	5	3
0	8	3	1

در جدول فوق سه خط رسم شده و از چهار کمتر است جواب بهینه نیست
از بین کل اعداد خط نخورده کمترین عدد را انتخاب میکنیم و از کلیه اعداد خط نخورده کسر و به اعداد تقاطع اضافه میکنیم

مثالهایی از تحقیق در عملیات پیشرفته

14+1	0	11	0
4+1	12	0	4
0	2-1	5-1	3-1
0	8-1	3-1	1-1

حالا در شکل زیر

15	0	11	0
5	12	0	4
0	1	4	2
0	7	2	0

در جدول بالا تعداد خطوط ۴ و تعداد عرضه یا تقاضا هم ۴ میشود بنابراین جواب بهینه است
 جواب بهینه انتخاب صفرها است- ابتدا صفرهایی که در سطر و ستون متناظر خود کمترین صفر داشته باشند
 انتخاب میکنیم

$$A_2=10$$

$$B_3=10$$

$$C_1=15$$

$$D_4=13$$

$$\text{Cost} = 10+10+15+13 = 48$$